

SKRYPTY DLA SZKÓŁ WYŻSZYCH
POLITECHNIKA ŁÓDZKA

CECYLIA MALINOWSKA-ADAMSKA

**ZBIÓR ZADAŃ Z FIZYKI
Z ROZWIĄZANAMI**

**DYNAMIKA PŁYNÓW FIZYKA CZĄSTECZKOWA
I TERMODYNAMIKA**

Wydanie III

**BIBLIOTEKA GŁÓWNA
POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ**

7 12 4 / S



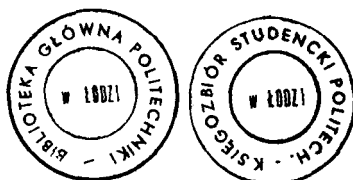
000-071239-00-0

ŁÓDŹ 1993

NAKŁADEM POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ



Skrypt jest przeznaczony dla studentów I i II roku
studiów dziennych, wieczorowych i zaocznych
wszystkich wydziałów Politechniki Łódzkiej



71239/s

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223

Nakład 200 + 47 egz. Ark. wyd. 6,3. Ark. druk. 9,5. Papier offset kl. III, 70 g. 61 x 86
Podpisano do druku 26 II 1991 r. Druk ukończono w lutym 1993 r.
Zamówienie 42 91. Cena zł 28 400, -
Wykonano w C.G.M.S.A. 93-005 Łódź, ul. Wólczańska 223



71239/s

SPIS TREŚCI

Przedmowa	4
1. Dynamika cieczy i gazów	5
1.1. Wstęp	5
1.2. Przykłady od 1 do 12	8
1.3. Zadania od 13 do 23	27
2. Fizyka cząsteczkowa i termodynamika	32
2.1. Ruch cieplny cząstek	32
2.1.1. Wstęp	32
2.1.2. Przykłady od 24 do 34	33
2.1.3. Zadania od 35 do 50	48
2.2. Kinetyczna teoria gazów	55
2.2.1. Wstęp	55
2.2.2. Przykłady od 51 do 56	58
2.2.3. Zadania od 57 do 67	67
2.3. Termodynamika	72
2.3.1. Wstęp	72
2.3.2. Przykłady od 68 do 85	75
2.3.3. Zadania od 86 do 118	106
2.4. Gazy rzeczywiste, pary i ciecze	124
2.4.1. Wstęp	124
2.4.2. Przykłady od 119 do 130	127
2.4.3. Zadania od 131 do 143	145



PRZEDMOWA

Niniejsza praca zawiera zadania z dynamiki cieczy i gazów, fizyki cząsteczkowej i termodynamiki.

Każdy rozdział skryptu rozpoczyna się krótkim wstępem, który obejmuje podstawowe prawa i wzory nieodzowne do rozwiązywania zadań, a następnie szczegółowo rozwiązane przykłady. Na końcu każdego rozdziału są zebrane zadania do samodzielnego rozwiązywania z podanymi wynikami końcowymi.

Udostępniając studentom I i II roku studiów dziennych, wieczorowych i zaocznych wszystkich wydziałów Politechniki Łódzkiej ten zbiór zadań, sądzę, iż będzie on stanowił pomoc w praktycznym opanowaniu podstaw fizyki cząsteczkowej.



1. DYNAMIKA CIECZY I GAZÓW

1.1. Wstęp

Ciśnienie hydrostatyczne słupa cieczy na głębokości h

$$p = \rho gh,$$

gdzie ρ - gęstość cieczy,

g - przyspieszenie ziemskie.

Ciśnienie zewnętrzne wywarte na ciecz lub gaz przekazywane jest jednakowo we wszystkich kierunkach bez zmiany wartości (prawo Pascala).

Na ciało zanurzone w cieczy (gazie) działa siła wyporu skierowana pionowo ku górze i równa ciężarowi cieczy(gazu) wypartej przez to ciało (prawo Archimedesesa).

$$F_w = \rho gV,$$

gdzie ρ - gęstość cieczy (gazu),

V - objętość wypartej cieczy (gazu).

Ruch stacjonarny cieczy nielepkiej i nieściśliwej opisuje prawo Bernoulliego:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const},$$

gdzie ρ - gęstość cieczy,

v - prędkość ruchu cieczy w danym przekroju rury,

h - wysokość danego przekroju rury ponad pewnym poziomem odniesienia,

p - ciśnienie panujące w danym przekroju rury,

g - przyspieszenie ziemskie.



Dla poziomej strugi cieczy

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.}$$

Z równania Bernoulliego wynika, że prędkość wypływu cieczy przez mały otwór wynosi (prawo Torricellego)

$$v = \sqrt{2gh},$$

gdzie h - wysokość powierzchni cieczy nad otworem.

Prędkość wypływu gazów z małych otworów w zbiornikach

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}},$$

gdzie p_1 - ciśnienie gazu w zbiorniku,

p_2 - ciśnienie gazu na zewnątrz zbiornika,

ρ - gęstość gazu wewnątrz zbiornika.

Dla przepływu stacjonarnego cieczy (nieściśliwej) słuszne jest równanie ciągłości

$$vS = \text{const.},$$

gdzie v - prędkość cieczy,

S - pole powierzchni przekroju poprzecznego strugi cieczy.

Objętość cieczy (wydajność) przepływającej w ciągu jednostki czasu przez dowolny przekrój S strugi cieczy określona jest wzorem

$$V = vS,$$

gdzie v - prędkość cieczy.

Przy przepływie objętości V cieczy z obszaru o ciśnieniu p_1 do obszaru o ciśnieniu p_2 musi być wykonana praca

$$L = (p_2 - p_1)V.$$



Siła tarcia wewnętrznego (lepkości) pomiędzy warstwami przepływającej cieczy

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta h} S,$$

gdzie η - współczynnik lepkości dynamicznej cieczy,

$\frac{\Delta v}{\Delta h}$ - gradient prędkości,

S - pole powierzchni stykających się warstw cieczy.

Przy przepływie laminarnym cieczy na ciało zanurzone w niej działa siła oporu lepkiego

$$F = k\eta v,$$

gdzie k - współczynnik zależny od kształtu i rozmiarów ciała,

η - współczynnik lepkości dynamicznej cieczy,

v - prędkość ciała względem cieczy.

Siła oporu lepkiego dla kuli opadającej w cieczy lub gazie określona jest wzorem Stokesa:

$$F = 6\pi\eta r v,$$

gdzie η - współczynnik lepkości dynamicznej ośrodka,

r - promień kuli,

v - prędkość kuli względem otaczającego płynu (cieczy lub gazu).

Objętość V cieczy przepływającej przez rurkę o długości l i promieniu r w ciągu czasu t , dla przepływu laminarnego, określona jest wzorem Poiseuille'a:

$$V = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8\eta l},$$

gdzie η - współczynnik lepkości dynamicznej cieczy,

Δp - różnica ciśnień na końcach rurki.

W przypadku przepływu turbulentnego, jeżeli prędkości przepływu nie są bardzo duże, opór ośrodka można obliczać z wzoru



$$F = C_x S \rho v^2,$$

gdzie C_x - współczynnik oporu czołowego, zależny od kształtu ciała i liczby Reynoldsa,

S - pole rzutu ciała na powierzchnię prostopadłą do wektora prędkości,

ρ - gęstość ośrodka.

Liczba Reynoldsa

$$R_e = \frac{l \rho v}{\eta} = \frac{l v}{\nu},$$

gdzie l - wielkość charakteryzująca liniowe rozmiary opływającego ciała,

ρ - gęstość ośrodka,

v - względna prędkość ośrodka,

η - współczynnik lepkości dynamicznej,

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ - współczynnik lepkości kinematycznej.

Przy małych wartościach R_e (mniejszych od 2000) przepływ jest laminarny, przy dużych turbulentny (burzliwy). Krytyczna wartość liczby Reynoldsa, określająca przejście od ruchu laminarnego do burzliwego, jest różna dla ciał o różnych kształtach.

1.2. Przykłady

Zadanie 1

Przez rurę o zmiennym przekroju, ustawioną poziomo, przepływa ciecz. Obliczyć objętość cieczy, która przepływnie przez dowolny przekrój rury w czasie $t = 5$ s, jeżeli w rurkach manometrycznych wmontowanych w rurę w miejscach o przekrojach $S_1 = 10^{-3} \text{ m}^2$ i $S_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ różnica poziomów cieczy $\Delta h = 0,25$ m.



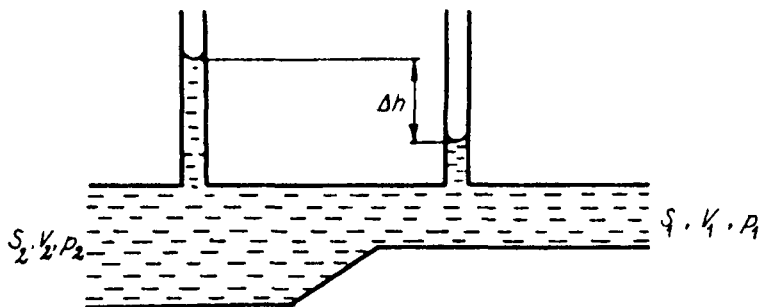
Rozwiązanie

Z równania Bernoulliego dla rury ustawionej poziomo (rys. 1) otrzymuje się

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2.$$

skąd

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2). \quad (1)$$



Rys. 1

Z rysunku widać, że

$$p_2 - p_1 = \Delta h \rho g. \quad (2)$$

Z równania ciągłości wynika zaś

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

czyli

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}. \quad (3)$$

Łącząc (1), (2) i (3) otrzymuje się

$$\Delta h g = \frac{v_1^2}{2 S_2^2} (S_2^2 - S_1^2). \quad (4)$$

Z wzoru (4)

$$v_1 = s_2 \sqrt{\frac{2 \Delta h g}{s_2^2 - s_1^2}}.$$

Objętość cieczy, która przepłynie przez dowolny przekrój rury w czasie t wynosi

$$V = v_1 s_1 t = s_1 s_2 t \sqrt{\frac{2 \Delta h g}{s_2^2 - s_1^2}}.$$

Podstawiając dane numeryczne otrzymuje się

$$\begin{aligned} V &= 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 5 \text{ s} \sqrt{\frac{2 \cdot 0,25 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}} = \\ &= 12,37 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Zadanie 2

Rura cylindryczna o promieniu $r = 0,1 \text{ m}$ jest napełniona cieczą do wysokości $h = 0,3 \text{ m}$. W dnie rury znajduje się otwór o przekroju $S = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

W ciągu jakiego czasu, po otwarciu otworu, poziom cieczy w rurze obniży się o $h_1 = 0,15 \text{ m}$

Rozwiązanie

Prędkość wypływu cieczy przez otwór o przekroju S w chwili, gdy poziom cieczy obniży się o x ma, według prawa Torricellego, wartość

$$v = \sqrt{2g(h - x)}. \quad (1)$$

Objętość cieczy, która w czasie dt wypłynie przez otwór o przekroju S będzie równa:

$$dV = Sv dt.$$

(2)



Równocześnie w czasie dt poziom cieczy w rurze obniży się o dx , czyli

$$dV = \pi r^2 dx. \quad (3)$$

Łącząc wyrażenia (1), (2) i (3) otrzymuje się

$$\pi r^2 dx = S dt \sqrt{2g} (h - x)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

skąd

$$dt = \frac{\pi r^2}{S \sqrt{2g}} \frac{dx}{(h - x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Szukany czas t otrzymuje się całkując powyższe równanie.

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi r^2}{S \sqrt{2g}} \int_0^{h_1} \frac{dx}{(h - x)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{\pi r^2}{Sg} \sqrt{2gh} - \sqrt{2g(h - h_1)}. \end{aligned}$$

Podstawiając dane numeryczne dostaje się:

$$\begin{aligned} t &= \frac{3,14 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= \left(\sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,3 \text{ m}} - \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,15 \text{ m}} \right) = 5,68 \text{ s}. \end{aligned}$$

Zadanie 3

Woda dopływa do fontanny z dużego zbiornika cylindrycznego i wytryska z otworu fontanny z prędkością $v = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Obliczyć:

- 1) Prędkość obniżania się poziomu wody w zbiorniku jeżeli jego średnica $d_1 = 2 \text{ m}$, a średnica otworu fontanny $d = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.
- 2) Ciśnienie, pod którego wpływem woda dostaje się do fontanny.



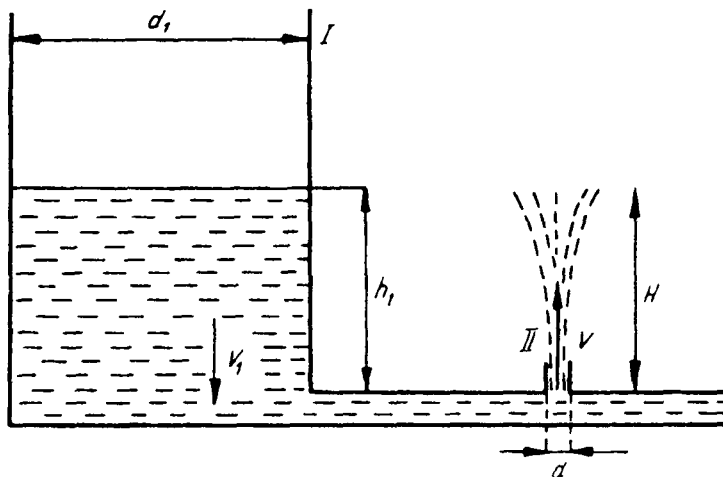
- 3) Wysokość poziomu wody w zbiorniku i strumieniu wypływającym z fontanny.

Rozwiązanie

Z równania ciągłości strugi wynika, że objętość V_1 wypływająca w ciągu jednostki czasu przez przekrój I (rys. 2) musi być równa objętości V_2 wody przepływającej przez przekrój II:

$$\frac{\pi d_1^2}{4} \cdot l_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot l_2, \quad (1)$$

gdzie l_1 i l_2 - długości cylindrycznych słupów wody przepływającej w jednostce czasu przez przekroje I i II.



Rys. 2

Ponieważ dla ruchu laminarnego $\frac{l_1}{t} = v_1$, $\frac{l_2}{t} = v$, zatem

$$d_1^2 v_1 = d^2 v.$$

Prędkość v_1 z jaką będzie obniżał się poziom wody w zbiorniku wyniesie

$$v_1 = v \left(\frac{d}{d_1} \right)^2. \quad (2)$$



Z równania Bernoulliego, dla rury ustawionej poziomo, wynika, że ciśnienie p_1 , pod wpływem którego woda dostaje się do fontanny wynosi

$$p_1 = \frac{\rho}{2} (v^2 - v_1^2). \quad (3)$$

Uwzględniając (2) w równaniu (3) otrzymuje się

$$p_1 = \frac{\rho v^2}{2d_1^4} (d_1^4 - d^4). \quad (4)$$

Znając ciśnienie p_1 można znaleźć wysokość poziomu wody w zbiorniku, według wzoru

$$p_1 = h_1 \rho g. \quad (5)$$

Łącząc (4) i (5) otrzymuje się

$$h_1 = \frac{v^2}{2d_1^4 g} (d_1^4 - d^4). \quad (6)$$

Wysokość H , na jaką wznosi się strumień wody w fontannie znajdujemy z wzoru Torricellego

$$v = \sqrt{2 g H},$$

skąd

$$H = \frac{v^2}{2g}. \quad (7)$$

Podstawiając do wzorów (2), (4), (5) i (7) dane numeryczne otrzymuje się ostatecznie

$$v_1 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}} \left(\frac{2 \cdot 10^{-2} \text{m}}{2 \text{m}} \right)^2 = 12 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$p_1 = \frac{10^3 \text{ kg m}^{-3} (12)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 4 \text{ m}^2} (4 \text{ m}^2 - 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = 7,2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

W obliczeniach pominięto wartość drugiego członu występującego w nawiasie.



$$h_1 = \frac{7,2 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 7,35 \text{ m},$$

$$H = \frac{144 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 7,35 \text{ m}.$$

Należy podkreślić, że wysokość h_1 poziomu wody wzbior-
niku jest równa wysokości H na jaką wznosi się strumień wo-
dy w fontannie (na podstawie prawa równowagi cieczy w na-
czyniach połączonych). Wyrażenia te są słuszne jeśli pomi-
ja się opór powietrza.

Zadanie 4

Powierzchnia tłoka strzykawki lekarskiej $S_1 = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$,
a powierzchnia przekroju jej otworu $S_2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. Strzy-
kawka znajduje się w położeniu poziomym.

Obliczyć siłę działającą na tłok, jeżeli ciecz o gęsto-
ści $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ została usunięta ze strzykawki w cza-
sie $t = 1 \text{ s}$, a przesunięcie tłoka $l = 0,05 \text{ m}$.

Rozwiązanie

Z równania ciągłości dla przekrojów S_1 i S_2

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

skąd

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}. \quad (1)$$

Dla ruchu laminarnego cieczy

$$v_1 = \frac{l}{t}. \quad (2)$$



Łącząc (1) i (2) otrzymuje się:

$$v_2 = \frac{1}{t} \frac{S_1}{S_2}. \quad (3)$$

Z równania Bernoulliego oraz definicji ciśnienia

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \frac{F}{S_1} = \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (4)$$

Uwzględniając (3) w równaniu (4) otrzymuje się dla F następujące wyrażenie:

$$F = \frac{\rho S_1 \cdot l^2}{2 S_2^2 \cdot t^2} (S_1^2 - S_2^2). \quad (5)$$

Podstawiając do wzoru (5) dane numeryczne otrzymuje się ostatecznie

$$F = \frac{1,1 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4 \cdot 1 \text{ s}^2} \times$$

$$\times (1,96 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 - 1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4) = 3,76 \text{ N}.$$

W obliczeniach pominięto drugi wyraz występujący w nawiasie jako bardzo mały.

Zadanie 5

Odkryty zbiornik stoi na poziomej płaszczyźnie (rys.3). Woda wycieka ze zbiornika przez mały otwór w ścianie bocznej. Otwór znajduje się w połowie wysokości zbiornika.

Jak zmienia się zasięg wypływającej wody jeżeli wysokość zbiornika wynosi H, pole przekroju poprzecznego S, pole przekroju poprzecznego otworu - S_1 . W chwili początkowej zbiornik był całkowicie wypełniony wodą.



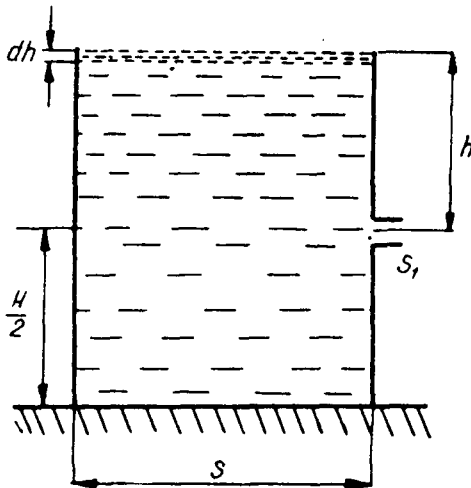
Rozwiązanie

Zasięg rzutu poziomego

$$Z = v \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{H}{2}}{g}} = v \sqrt{\frac{H}{g}}. \quad (1)$$

Według wzoru Torricellego

$$v = \sqrt{2 gh}. \quad (2)$$



Rys. 3

Wyznaczając $h = f(t)$ należy zauważyć, że ponieważ ciecz jest nieściśliwa, to dla warunków zadania

$$- S \cdot dh = v S_1 dt = \sqrt{2g} h^{\frac{1}{2}} \cdot S_1 dt,$$

skąd

$$- \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{\sqrt{2g} \cdot S_1}{S} dt.$$

Całkując obustronnie powyższe równanie otrzymuje się

$$-2\sqrt{h} = \frac{\sqrt{2g} \cdot S_1}{S} \cdot t + C. \quad (3)$$

gdzie C jest stałą całkowania, którą można wyznaczyć z warunków początkowych.

Dla $t = 0$

$h = \frac{H}{2}$, zatem na podstawie (3)

$$C = -2 \left(\frac{H}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2H}. \quad (4)$$

Uwzględniając (4) w (3) otrzymuje się

$$h = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2H} - \frac{\sqrt{2g} \cdot S_1}{S} \cdot t \right). \quad (5)$$

Podstawiając (2) i (5) do (1) otrzymuje się zależność zasięgu wypływającej cieczy od czasu wypływu t oraz warunków wypływu (H, S, S_1)

$$Z = H - \frac{S_1}{S} \sqrt{gH} \cdot t.$$

Zadanie 6

W rurze ustawionej poziomo (rys. 4) przepływa ciecz. Różnica poziomów tej cieczy w rurkach a i b, $(h_b - h_a) = 0,1$ m.

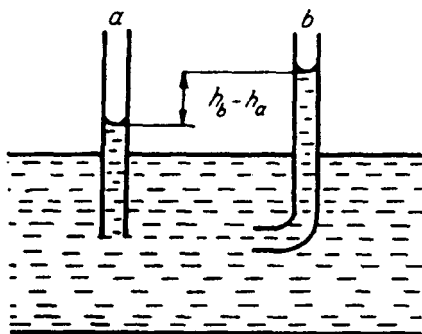
Srednice rurek a i b są jednakowe. Znaleźć prędkość przepływu cieczy w rurze.

Rozwiązanie

Zgodnie z równaniem Bernoulliego ciśnienie p_b mierzone przy pomocy rurki b wynosi:

$$p_b = h_a \rho g + \frac{\rho}{2} v_x^2. \quad (1)$$

gdzie v_x - szukana prędkość przepływu cieczy w rurze.



Rys. 4

Z definicji ciśnienia hydrostatycznego

$$p_b = h_b \rho g. \quad (2)$$

Łącząc (1) i (2) otrzymuje się:

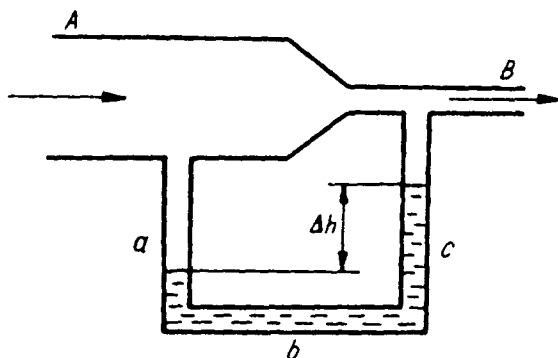
$$(h_b - h_a)g = \frac{v_x^2}{2}.$$

skąd

$$v_x = \sqrt{2g(h_b - h_a)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,1 \text{ m}} = 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Zadanie 7

Powietrze jest przedmuchiwane przez rurkę AB (rys. 5). W ciągu $t = 60 \text{ s}$ przez rurkę tę przepływa powietrze o objętości $V = 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Pole szerokiej części rurki AB wynosi $S_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, zaś pole wąskiej części rurki oraz rurki abc $S_2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. Znaleźć różnicę poziomów Δh wody znajdujących się w rurce abc. Należy przyjąć gęstość powietrza $\rho_1 = 1,32 \text{ kg/m}^3$, gęstość wody $\rho_2 = 10^3 \text{ kg/m}^3$.



Rys. 5

Rozwiązanie

Zgodnie z równaniem ciągłości

$$V = S_1 v_1 t = S_2 v_2 t,$$

skąd

$$v_1 = \frac{V}{S_1 \cdot t}, \quad (1)$$

$$v_2 = \frac{V}{S_2 \cdot t}. \quad (2)$$

Z równania Bernoulliego dla rury ustawionej poziomo

$$p_1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho_1 v_2^2}{2},$$

czyli

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho_1}{2} (v_2^2 - v_1^2). \quad (3)$$

Z rysunku widać, że:

$$p_1 - p_2 = \Delta h \rho_2 g. \quad (4)$$

Uwzględniając (4) w równaniu (3) otrzymuje się

$$\Delta h \rho_2 g = \frac{\rho_1}{2} (v_2^2 - v_1^2). \quad (5)$$

Podstawiając (1) i (2) do (5) dostaje się ostatecznie

$$\Delta h = \frac{\rho_1 V^2}{2 \rho_2 g t^2 S_1^2 S_2^2} (S_1^2 - S_2^2). \quad (6)$$

Podstawiając do równania (6) dane numeryczne otrzymuje się

$$h = \frac{1,32 \text{ kg/m}^3 \cdot 225 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6}{2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 36 \cdot 10^2 \text{ s}^2 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \cdot 25 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4} \times \\ \times (4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 - 25 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4) = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$



Zadanie 8

Kuleczka szklana o gęstości ρ i promieniu r spada swobodnie w cieczy o gęstości ρ_1 i lepkości dynamicznej η . Obliczyć prędkość kuleczki po upływie czasu t od chwili rozpoczęcia ruchu.

Rozwiązanie

Na kuleczkę poruszającą się w cieczy lepkiej działają 3 siły:

- 1) siła ciężkości G skierowana pionowo ku dołowi

$$G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g, \quad (1)$$

- 2) siła wyporu cieczy, określona przez prawo Archimedeasa, skierowana pionowo ku górze

$$F_w = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g, \quad (2)$$

- 3) siła oporu lepkiego, określona przez prawo Stokesa, skierowana pionowo do góry

$$F_\eta = 6\pi\eta r v. \quad (3)$$

Ruch kuleczki z przyspieszeniem $a = \frac{dv}{dt}$ powoduje wypadkowa F trzech wymienionych wyżej sił:

$$F = G - F_w - F_\eta. \quad (4)$$

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki, równanie (4) po uwzględnieniu (1), (2) i (3) przyjmuje postać:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g - 6\pi\eta r v,$$

czyli

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\rho - \rho_1}{\rho} \right) g - \frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho r^2} v. \quad (5)$$

Oznaczając

$$\left(\frac{\rho - \rho_1}{\rho} \right) g = c \quad \text{oraz} \quad \frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho r^2} = b \quad (6)$$



równanie (5) można zapisać:

$$\frac{dv}{dt} = c - bv. \quad (7)$$

Jest to równanie różniczkowe pierwszego rzędu, które należy rozwiązać. Niech

$$c - bv = x, \quad (8)$$

wówczas

$$v = \frac{c - x}{b},$$
$$dv = -\frac{1}{b} dx. \quad (9)$$

Podstawiając (8) i (9) do (7) otrzymuje się

$$\frac{dx}{x} = -b dt.$$

Całkując obustronnie powyższe równanie dostaje się

$$\ln x = -bt + C_1,$$

czyli

$$x = \exp(-bt + C_1)$$

lub z uwagi na równanie (8)

$$c - bv = \exp(-bt + C_1), \quad (10)$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania, którą należy wyznaczyć z warunków początkowych

$$v = 0 \quad \text{dla} \quad t = 0. \quad (11)$$

Łącząc (10) i (11) otrzymuje się

$$c = e^{C_1},$$

skąd

$$C_1 = \ln c,$$

zaś

$$v = \frac{c(1 - e^{-bt})}{b}. \quad (12)$$



Podstawiając do (12) wartości dla c i b z równania (6) dostaje się ostatecznie:

$$v = \frac{2(\rho - \rho_1)r^2g \left(1 - e^{-\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho r^2} t}\right)}{9\eta}.$$

Zadanie 9

Przy określaniu lepkości dynamicznej cieczy metodą Stokesa zakłada się, że prędkość spadania kulki w cieczy $v_m = \text{const}$. Sprawdzić po jakim czasie, od chwili rozpoczęcia ruchu założenie to jest prawdziwe.

Obliczyć w jakim odstępie czasu prędkość kulki osiągnie wartość $v = 0,995 v_m$, jeżeli gęstość materiału kulki $\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, promień $r = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, lepkość dynamiczna cieczy $\eta = 0,4 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$. W chwili początkowej prędkość $v_0 = 0$.

Rozwiązanie

Z różniczkowego równania ruchu kulki

$$m \frac{dv}{dt} = mg - V\rho_2 g - 6\pi\eta r v,$$

czyli

$$m \frac{dv}{dt} = mg \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - 6\pi\eta r v,$$

otrzymuje się wyrażenie dla prędkości maksymalnej v_m (przy której $\frac{dv}{dt} = 0$):

$$v_m = \frac{2}{9} \frac{r^2 g (\rho_1 - \rho_2)}{\eta}, \quad (1)$$

gdzie ρ_2 - gęstość cieczy.

Czas, po upływie którego prędkość kulki będzie równa wartości zadanej v (patrz rozwiązanie zadania poprzedniego),

$$\tau = \frac{2 r^2 \rho_1}{9 \eta} \ln \frac{1}{1 - \frac{9 \eta \cdot v}{2 r^2 g (\rho_1 - \rho_2)}}. \quad (2)$$



Podstawiając (1) do (2) można przekonać się, że prędkość opadania kulki będzie stała i równa

$$v_m = \frac{2}{9} \frac{r^2 g (\rho_1 - \rho_2)}{\eta} \text{ przy } t = \infty.$$

Odstęp czasu, w ciągu którego prędkość $v = 0,995 v_m$ wyniesie

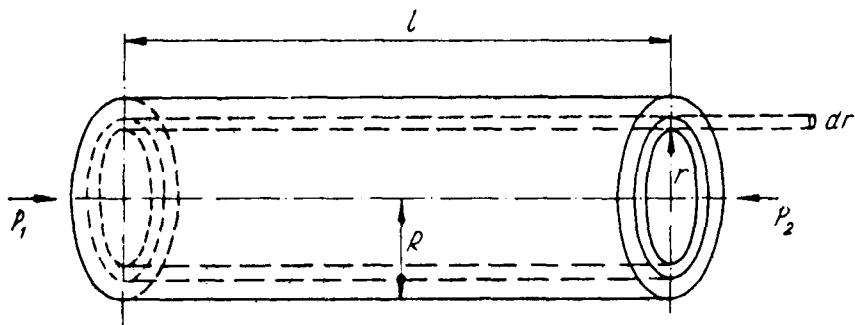
$$\tau_1 = \frac{2}{9} \frac{r^2 \rho_1}{\eta} \ln \frac{1}{1 - 0,995}.$$

Po podstawieniu danych numerycznych:

$$\tau_1 = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}{9 \cdot 0,4 \frac{\text{N s}}{\text{m}^2}} \ln \frac{1}{0,005} = 0,023 \text{ s}.$$

Zadanie 10

Ciecz o lepkości dynamicznej η przepływa przez rurkę o promieniu wewnętrznym R i długości l pod wpływem różnicy ciśnień ($p_1 - p_2$) na końcach rurki. Znaleźć prędkość z jaką porusza się warstwa cieczy odległa o r od osi rury (rys.6).



Rys. 6

Rozwiązanie

Niech będzie wydzielona pewna objętość cieczy w kształcie walca o promieniu r i osi pokrywającej się z osią rury.

Na powierzchnię boczną walca działa siła styczna F , będąca wynikiem tarcia wewnętrznego. W przypadku ruchu jednostajnego cieczy, siła F musi być zrównoważona siłą F_p , wynikającą z różnicy ciśnień ($p_1 - p_2$), panujących na końcach rury. Tak więc:

$$F = -F_p$$

Ponieważ $F_p = (p_1 - p_2) \pi r^2$ oraz $F = \eta \frac{dv}{dr} S$, gdzie S oznacza powierzchnię boczną warstwy cylindrycznej równą $2\pi r l$, to

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 + 2 \pi r l \eta \frac{dv}{dr} = 0.$$

Stąd

$$dv = - \frac{(p_1 - p_2)}{2 \eta l} r dr.$$

Całkowanie ostatniego wyrażenia prowadzi do wyniku

$$v = - \frac{(p_1 - p_2)}{4 \eta l} r^2 + C,$$

gdzie C jest stałą całkowania, którą można wyznaczyć biorąc pod uwagę fakt, że największą prędkość ma ciecz na osi rury; przy jej ściankach prędkość jest równa zero, tzn. $v = 0$, gdy $r = R$. Uwzględniając powyższe zależności w równaniu dla v otrzymuje się

$$C = \frac{(p_1 - p_2)}{4 \eta l} R^2,$$

a zatem

$$v = \frac{(p_1 - p_2)}{4 \eta l} (R^2 - r^2).$$

Zadanie 11

W bocznej ścianie naczynia walcowego o promieniu $R = 2 \cdot 10^{-2}$ m wstawiona jest pozioma rurka włoskowata o wew-



nętrznym promieniu $r = 1 \cdot 10^{-3}$ m i długości $l = 2 \cdot 10^{-2}$ m. Do naczynia nalano oleju rycynowego o współczynniku lepkości dynamicznej $\eta = 1,2 \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$.

Znaleźć prędkość v obniżania się poziomu oleju rycynowego w naczyniu walcowatym w zależności od wysokości h tego poziomu ponad rurką włoskową. Numeryczną wartość v znaleźć przy $h = 0,26$ m. Gęstość oleju rycynowego $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$.

Rozwiązanie

Prędkość obniżania się poziomu oleju rycynowego w naczyniu zależy od prędkości przepływu oleju przez rurkę włoskową. Objętość oleju przepływającego w czasie t przez kapilarę jest określona wzorem Poiseuille'a

$$V = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8 l \eta}, \quad (1)$$

gdzie Δp jest różnicą ciśnień na końcach rurki spowodowaną ciśnieniem hydrostatycznym słupa cieczy o wysokości h

$$\Delta p = \rho g h. \quad (2)$$

Z drugiej strony

$$V = S_1 v_1 t = \pi r^2 v_1 t, \quad (3)$$

gdzie v_1 jest prędkością przepływu oleju przez rurkę włoskową. Łącząc (1), (2) i (3) otrzymuje się:

$$v_1 = \frac{r^2 \rho g h}{8 l \eta}.$$

Ponieważ z równania ciągłości

$$S_1 v_1 = v S,$$

gdzie v jest prędkością obniżenia się poziomu oleju w naczyniu, $S = \pi R^2$ stanowi pole przekroju poprzecznego naczynia to:

$$v = \frac{r^4 \rho g h}{8 l R^2}.$$



Podstawiając do wzoru (4) wartości numeryczne, otrzymujemy się

$$v = \frac{1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4 \cdot 900 \text{ kgm}^{-3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,26 \text{ m}}{8 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{ms}} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}.$$

Zadanie 12

Naczynie napełniono wodą do wysokości $H = 0,60 \text{ m}$. Na jakiej wysokości od dna należy zrobić otwór, aby wypływająca woda padała jak najdalej na poziomą płaszczyznę, na której stoi naczynie z wodą.

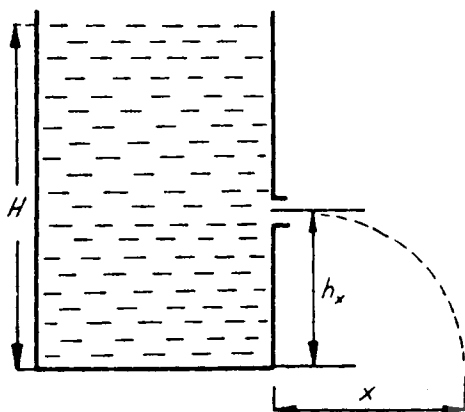
Rozwiązanie

Niech h_x oznacza wysokość, na której należy zrobić otwór

Prędkość wypływu wody przez otwór, zgodnie z wzorem Torricellego, wynosi

$$v = \sqrt{2 g(H - h_x)}. \quad (1)$$

Tor wypływającej wody jest taki, jak przy rzucie poziomym (rys. 7), zatem



Rys. 7

$$h_x = \frac{1}{2} g t^2, \quad (2)$$

zaś

$$x = v t \quad (3)$$

Łącząc (1), (2) i (3) otrzymuje się:

$$x = 2 \sqrt{(H - h_x) \cdot h_x}.$$

Zasięg x wypływającej wody będzie maksymalny, gdy wyrażenie:

$z = (H - h_x) h_x$ będzie maksymalne, tzn. gdy

$$\frac{dz}{dh_x} = H - 2 h_x = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{d^2 z}{dh_x^2} = -2 < 0,$$

czyli dla $h_x = \frac{H}{2} = 0,3 \text{ m}.$

1.3. Zadania

Zadanie 13

Obliczyć czas wypływu cieczy nieściśliwej z otwartego naczynia cylindrycznego o wysokości $H = 4,9 \text{ m}$, jeżeli średnica niewielkiego otworu w dnie zbiornika jest $k = 60$ razy mniejsza od średnicy naczynia.

Rozwiązanie

$$t = k^2 \sqrt{\frac{2 H}{g}} = 1 \text{ godz.}$$

Zadanie 14

Otwarte naczynie cylindryczne napełniono dwoma cieczami o gęstościach ρ_1 i ρ_2 . Znaleźć prędkość z jaką ciecz zacznie wypływać przez mały otwór w dnie, jeżeli wysokość słupa cieczy dolnej jest równa h_1 , górnej h_2 .

Rozwiązanie

$$v = \sqrt{2g \left(h_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 \right)}.$$

Zadanie 15

Znaleźć w dowolnej chwili t prędkość v , przyspieszenie oraz drogę s kulki opadającej w cieczy o gęstości ρ_1 , lep-

kości dynamicznej η , jeżeli gęstość materiału kulki wynosi ρ , promień r .

Rozwiązanie

$$v = \frac{2}{9} \frac{(\rho - \rho_1) r^2 g}{\eta} \left(1 - e^{-\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho r^2} t} \right),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(\rho - \rho_1) g}{\rho} \cdot e^{-\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho r^2} t}.$$

$$s = \int v dt = \frac{2}{9} \frac{(\rho - \rho_1) r^2 g}{\eta} t + \frac{4}{81} \frac{(\rho - \rho_1) g r^4}{\eta^2} \times \\ \times \exp\left(-\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho r^2} t\right).$$

Zadanie 16

Wiaderko z wodą zawieszone na sprężynie wykonuje w płaszczyźnie pionowej drgania harmoniczne o amplitudzie $A = 0,10$ m i częstotliwości $n = 0,5$ Hz. Przez otwór w środku dna wiaderka wypływa strumień wody.

Znaleźć najmniejszą i największą wartość prędkości wypływu wody przez otwór, jeżeli wysokość słupa wody w wiaderku jest równa $h = 0,10$ m.

Rozwiązanie

$$v_{\min} = \sqrt{2(g - 4\pi^2 n^2 A)h} = 1,33 \text{ m/s},$$

$$v_{\max} = \sqrt{2(g + 4\pi^2 n^2 A)h} = 1,47 \text{ m/s}.$$

Zadanie 17

Jaka jest moc P serca człowieka, jeżeli podczas każdego cyklu jego pracy lewy przedsionek, kurcząc się, wciąga do aorty krew o masie $m = 7 \cdot 10^{-2}$ kg pod ciśnieniem $p = 2,6 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, a w ciągu czasu $t = 60$ s następuje $n = 75$ skurczów przedsionka serca. Gęstość krwi $\rho = 1,05 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Rozwiązanie

$$P = \frac{P}{\rho} \cdot \frac{n}{t} = 2,2 \text{ W.}$$

Zadanie 18

Znaleźć moc P strumienia powietrza napływającego na samochód jadący z prędkością $v = 27,7 \text{ m/s}$, jeżeli jego powierzchnia czołowa $S = 2,5 \text{ m}^2$. Gęstość powietrza $\rho = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Rozwiązanie

$$P = \frac{\rho S v^3}{2} = 34,54 \cdot 10^3 \text{ W.}$$

Zadanie 19

Z jaką mocą P pracuje silnik motocykla, jeżeli jedzie on z prędkością $v_1 = 20 \text{ m/s}$, a prędkość przeciwnego wiatru $v_2 = 10 \text{ m/s}$. Masa motocykla wraz z kierowcą $m = 200 \text{ kg}$, współczynnik tarcia pojazdu o szosę $f = 0,2$, powierzchnia czołowa pojazdu $S = 1,2 \text{ m}^2$.

Rozwiązanie

$$P = \left[mgf + \frac{\rho S (v_1 + v_2)^2}{2} \right] v_1 = 22 \text{ kW.}$$

Zadanie 20

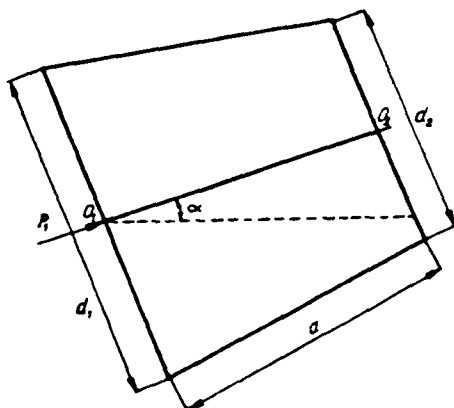
W rurze o zmiennym przekroju (rys. 8) przepływa woda w ilości $Q = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$.

Obliczyć ciśnienie w punkcie O_2 , jeżeli ciśnienie w punkcie O_1 wynosi $p_1 = 2,5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Średnice przekrojów: $d_1 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, $d_2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

Odległość między przekrojami $a = 10 \text{ m}$. Kąt nachylenia osi rury do poziomemu $\alpha = 30^\circ$. Tarcie pominąć. Gęstość wody $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$.





Rys. 8

Rozwiązanie

$$p_2 = p_1 - \frac{8 Q^2 \rho}{\pi^2 d_1^4 d_2^4} (d_1^4 - d_2^4) - \rho g a \sin \alpha = 1,84 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Zadanie 21

Przez rurę o zmiennym przekroju, ustawioną poziomo, prze-
pływa woda o temperaturze $T = 283 \text{ K}$ w ilości $Q = 3,14 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.
Ciśnienie w szerokiej części rury $p_1 = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Obliczyć ciśnienie oraz liczbę Reynoldsa Re dla zwęż-
zonej części rury; średnice części szerokiej i części zwęż-
zonej rury wynoszą odpowiednio: $d_1 = 0,20 \text{ m}$, $d_2 = 0,12 \text{ m}$.
Lepkość kinematyczna wody w warunkach zadania oraz jej gę-
stość wynoszą: $\nu = 1,33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho = 999,7 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Rozwiązanie

$$p_2 = p_1 - \frac{8 Q^2 \rho}{\pi^2 d_1^4 d_2^4} (d_1^4 - d_2^4) = 1,97 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$Re = \frac{v_2 d_2}{\nu} = \frac{4 Q}{\pi d_2 \nu} = 2,6 \cdot 10^6,$$

tj. dla ruchu burzliwego.



Zadanie 22

W boczną ścianę naczynia stojącego na stole wstawiona jest rurka włoskowata na wysokości $h = 5 \cdot 10^{-2}$ m nad dnem naczynia. Promień wewnętrzny kapilary $r = 1 \cdot 10^{-3}$ m, a długość $l = 1 \cdot 10^{-2}$ m. Naczynie jest wypełnione olejem o gęstości $\rho = 9 \cdot 10^2$ kg/m³ i o współczynniku lepkości dynamicznej $\eta = 5 \cdot 10^{-1} \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$. Poziom oleju w naczyniu jest utrzymywany na stałej wysokości $H = 5 \cdot 10^{-1}$ m powyżej rurki włoskowatej.

W jakiej poziomej odległości S od końca rurki włoskowatej strumień oleju pada na stół?

Rozwiązanie

$$S = \frac{H \rho r^2}{8 l \eta} \sqrt{2hg} = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

Zadanie 23

Przez rurę o średnicy $d = 7 \cdot 10^{-2}$ m przepływa ropa naftowa, o współczynniku lepkości kinematycznej $\nu = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ w ilości $Q = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$.

Określić warunki przepływu oraz obliczyć przy jakiej wydajności warunek przepływu będzie jeszcze laminarny. Krytyczna wartość liczby Reynoldsa $R_{e_{kr}} = 2300$.

Rozwiązanie

$$R_e = \frac{4 Q}{\pi d \nu} = 3240; \text{ jest to warunek przepływu turbulentnego.}$$

$$Q_{\max} = \frac{1}{4} \pi d \nu R_{e_{kr}} = 3,16 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}.$$



2. FIZYKA CZĄSTECZKOWA I TERMODYNAMIKA

2.1. Ruch cieplny cząstek

2.1.1. Wstęp

Zmiany temperatury wywołują zmiany liniowych rozmiarów ciał stałych zgodnie z wzorem:

$$l_T = l_0 [1 + \alpha(T - T_0)],$$

gdzie l_T - długość ciała w temperaturze T ,

l_0 - długość ciała w temperaturze T_0 ,

α - średni (w przedziale temperatur od T_0 do T) współczynnik rozszerzalności liniowej materiału, z którego ciało jest wykonane.

Zmiany objętości ciał pod wpływem zmian temperatury określić można zależnością:

$$V_T = V_0 [1 + \beta(T - T_0)],$$

gdzie V_T i V_0 - objętości ciała odpowiednio w temperaturze T i T_0 ,

β - współczynnik rozszerzalności objętościowej.

Dla ciał izotropowych $\beta = 3\alpha$.

Dla cieczy występuje tylko rozszerzalność objętościowa.

Jeżeli przez V_0 oznaczyć objętość cieczy w naczyniu w temperaturze T_0 , a przez V objętość, którą ciecz zajmie w temperaturze T , to wyrażenie

$$\beta^* = \frac{V - V_0}{T - T_0} \cdot \frac{1}{V_0}$$



oznaczają będzie średnią wartość pozornego współczynnika rozszerzalności objętościowej cieczy, bowiem przy zmianie temperatury zmienia się także objętość naczynia. Oznaczając przez β_s współczynnik rozszerzalności objętościowej naczynia, dla rzeczywistej wartości średniego współczynnika rozszerzalności objętościowej cieczy otrzymuje się

$$\beta = \beta^* + \beta_s.$$

Gęstość w temperaturze T:

$$\rho_T = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)}.$$

gdzie ρ_0 - gęstość w temperaturze T_0 .

Równanie stanu gazu doskonałego (równanie Mendelejewa - Clapeyrona):

$$pV = \frac{m}{\mu} RT = \frac{Nm_0}{N_A m_0} RT = NkT,$$

gdzie p - ciśnienie

V - objętość,

T - temperatura gazu,

$\frac{m}{\mu}$ - liczba kilomoli gazu zawartych w danej masie m gazu,

μ - masa jednego kilomola gazu,

$R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{J}{kmol \cdot K}$ - uniwersalna stała gazowa,

m_0 - masa pojedynczej cząsteczki gazu,

N - liczba cząsteczek zawartych w danej masie m gazu,

$N_A = 6,02 \cdot 10^{26} (kmol)^{-1}$ - liczba Avogadro,

$k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ - stała Boltzmanna.

2.1.2. Przykłady

Zadanie 24

Termometr zanurzony w topniejącym lodzie wskazuje temperaturę T_0 , a we wrzącej wodzie pod ciśnieniem b - temperaturę T_H .



Znaleźć wzór podający rzeczywistą temperaturę T w dowolnym miejscu skali termometru T_n przy założeniu, że podziałki skali odpowiadają równym objętościom rurki termometru. Temperatura wody pod ciśnieniem b wynosi T_b .

Rozwiązanie

Różnica temperatur $(T_H - T_0)$ odczytanych na termometrze odpowiada rzeczywistej zmianie temperatury o T_b . A więc w środowisku o temperaturze T , temperatura T_0 na termometrze zmieni się o wartość

$$\frac{(T_H - T_0)}{T_b} T,$$

a zatem na termometrze będzie można odczytać wartość

$$T_n = T_0 + \frac{(T_H - T_0)}{T_b} T,$$

skąd

$$T = T_b \frac{(T_n - T_0)}{(T_H - T_0)}.$$

Zadanie 25

Ciśnienie barometryczne odczytane na mosiężnej skali barometru przy temperaturze $T_1 = 293$ K wynosi $b_1 = 99991,5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Skala była cechowana w temperaturze $T_0 = 273$ K.

Obliczyć jakie ciśnienie wskazywałby barometr w temperaturze T_0 . Współczynniki rozszerzalności objętościowej dla rtęci i mosiądzu są równe odpowiednio: $\beta = 182 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\beta_m = 3\alpha \cdot 19 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Ze zmianą temperatury zmieniają się: gęstość rtęci, wysokość słupa rtęci, który jest w równowadze z ciśnieniem barometrycznym oraz długość mosiężnej skali. Dlatego odczyt barometru redukuje się zwykle do temperatury T_0 .



Rozwiązanie

Niech rzeczywista wysokość słupa rtęci w temperaturze T_1 wynosi b , a w temperaturze $T_0 = b_0$ wówczas

$$b_0 \rho_0 g = b \rho g,$$

co oznacza równość ciśnień w obu temperaturach.

Masa właściwa rtęci zmienia się z temperaturą wg zależności:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)},$$

zatem, dla omawianego przedziału temperatur $T_1 - T_0$,

$$b_0 \rho_0 g = b g \frac{\rho_0}{1 + \beta(T_1 - T_0)}. \quad (1)$$

Ponieważ przy zmianie temperatury skala pomiarowa zmienia swą długość, więc odczytanej wartości b_1 w temperaturze T_1 będzie odpowiadać rzeczywista wartość b równa

$$b = b_1 + b_1 3\alpha(T_1 - T_0). \quad (2)$$

Łącząc (1) i (2) otrzymuje się

$$b_0 = b_1 \frac{[1 + 3\alpha(T_1 - T_0)]}{1 + \beta(T_1 - T_0)} = b_1 [1 + (3\alpha - \beta)(T_1 - T_0)].$$

Podstawiając dane numeryczne dostaje się

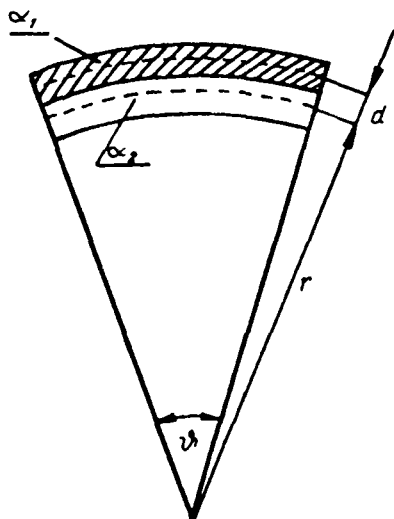
$$\begin{aligned} b_0 &= 9999,5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} [1 + (19 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} - 182 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}) 20 \text{ K}] = \\ &= 99670,2 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \end{aligned}$$

Zadanie 26

Dwa metalowe paski, miedziany i stalowy, mające w temperaturze $T_0 = 273 \text{ K}$ jednakowe grubości $d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ i jednakowe długości l_0 są połączone ze sobą tak, że oba ich końce pokrywają się. Współczynnik rozszerzalności liniowej



miedzi $\alpha_1 = 17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, stali - $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Gdy ten bimetaliczny pasek podgrzano do temperatury $T = 673 \text{ K}$ wygiął się on tworząc łuk (rys. 9).



Rys. 9

Wyznaczyć promień krzywizny tego łuku.

Rozwiązanie

W pasku powstają napiecia ściskające i rozciągające. W przybliżeniu można założyć, że środkowa część każdego paska będzie wolna od takich sił i będzie rozszerzała się tak, jak gdyby cały pasek był swobodny.

Niech l_1 będzie długością górnego paska po rozszerzeniu, a l_2 długością dolnego paska (rys. 9). Odległość między środkowymi liniami pasków wynosi d .

Ponieważ d jest bardzo mała w porównaniu z r , to

$$l_2 = r \varphi$$

$$l_1 = (r + d) \varphi,$$

a więc

$$\frac{l_1}{l_2} = 1 + \frac{d}{r}. \quad (1)$$

Lecz

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{l_2} &= \frac{l_0 [1 + \alpha_1 (T - T_0)]}{l_0 [1 + \alpha_2 (T - T_0)]} = \frac{1 + \alpha_1 (T - T_0)}{1 + \alpha_2 (T - T_0)} \\ &\approx 1 + (\alpha_1 - \alpha_2) (T - T_0). \end{aligned} \quad (2)$$



Łącząc (1) i (2) otrzymuje się

$$1 + \frac{d}{r} = 1 + (\alpha_1 - \alpha_2)(T - T_0),$$

skąd

$$r = \frac{d}{(\alpha_1 - \alpha_2)(T - T_0)}. \quad (3)$$

Podstawiając dane numeryczne otrzymuje się

$$r = \frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{(17 - 12) \cdot 10^{-6} \text{ K} \cdot 400 \text{ K}} = 1 \text{ m}.$$

Z wzoru widać, że jeżeli $\alpha_1 = \alpha_2$ albo $(T - T_0) = 0$, to $r = \infty$, czyli pasek bimetaliczny pozostaje wtedy prosty.

Zadanie 27

Masa próżnego naczynia szklanego w temperaturze $T_0 = 273 \text{ K}$ wynosi $m_0 = 0,1 \text{ kg}$, a napełnionego rtęcią - $m_1 = 1,431 \text{ kg}$. Jeżeli naczynie ogrzać do temperatury $T = 313 \text{ K}$, część rtęci wylewa się, a pozostała rtęć z naczyniem posiada masę $m_2 = 1,423 \text{ kg}$.

Obliczyć rzeczywisty współczynnik rozszerzalności objętościowej β rtęci, jeżeli średni współczynnik rozszerzalności objętościowej szkła $\beta_s = 30 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Rozwiązanie

Rzeczywisty współczynnik rozszerzalności objętościowej rtęci

$$\beta = \beta^* + \beta_s. \quad (1)$$

gdzie β^* jest pozornym współczynnikiem rozszerzalności objętościowej

$$\beta^* = \frac{V - V_0}{V_0(T - T_0)} = \frac{\Delta V}{V_0(T - T_0)}. \quad (2)$$



W temperaturze T_0 rtęć zajmuje objętość

$$V_0 = \frac{m}{\rho_0} = \frac{m_1 - m_0}{\rho_0}. \quad (3)$$

Zmiana objętości rtęci przy zmianie temperatury od T_0 do T wyniesie

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{\Delta m}{\rho} = \frac{m_1 - m_2}{\rho},$$

gdzie Δm - masa rtęci, która wylewa się z naczynia,

ρ - gęstość rtęci w temperaturze T .

Ponieważ

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)},$$

wobec tego

$$\Delta V = \frac{(m_1 - m_2)[1 + \beta(T - T_0)]}{\rho_0}. \quad (4)$$

Uwzględniając (2), (3) i (4) w (1) dostaje się

$$\beta = \frac{m_1 - m_2 + \beta_s(m_1 - m_0)(T - T_0)}{(m_2 - m_0)(T - T_0)}. \quad (5)$$

Podstawiając do (5) dane numeryczne otrzymuje się

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1,431 \text{ kg} - 1,423 \text{ kg} + 30 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} (1,431 \text{ kg} - 0,1 \text{ kg})40}{(1,423 \text{ kg} - 0,1 \text{ kg})40} = \\ &= 181 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}. \end{aligned}$$

Zadanie 28

Obliczyć bezwzględną zmianę długości pręta przy zmianie jego temperatury od T_0 do T , jeżeli w tym przedziale temperatur współczynnik rozszerzalności liniowej zmienia się według zależności: $\alpha = \alpha_0(1 + bT)$, gdzie α_0 - współczyn-

nik rozszerzalności liniowej przy temperaturze T_0 , b - stała niezależna od temperatury.

Początkowa długość pręta jest równa l_0 .

Rozwiązanie

Współczynnik rozszerzalności liniowej ciał stałych

$$\alpha = \frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{dT}, \quad (1)$$

gdzie l - rozmiar liniowy ciała zmieniający się wraz ze zmianą temperatury.

Rozdzielając zmienne w równaniu (1) i całkując otrzymuje się:

$$\int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \int_{T_0}^T \alpha_0 (1 + bT) dT,$$

skąd

$$\ln \frac{l}{l_0} = \alpha_0 (T - T_0) \left[1 + b \cdot \frac{(T + T_0)}{2} \right]. \quad (2)$$

Oznaczając

$$\alpha_0 (T - T_0) \left[1 + b \cdot \frac{(T + T_0)}{2} \right] = c,$$

równanie (2) można zapisać:

$$\frac{l}{l_0} = e^c.$$

Zatem

$$\Delta l = l - l_0 = l_0 (e^c - 1).$$

Zadanie 29

Pręt miedziany o długości $l = 0,01$ m i średnicy $d_0 = 0,015$ m ochłodzono w ciekłym azocie do temperatury $T_1 = 88$ K, a następnie wstawiono w otwór, gdzie temperatura

wynosi 273 K. Z jaką siłą działa pręt na otwór po ogrzaniu go do temperatury $T_2 = 293$ K. Współczynnik rozszerzalności liniowej miedzi jest $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Moduł Younga dla miedzi $E = 11,76 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Rozwiązanie

Po oziębieniu pręta od temperatury początkowej T_0 do T_1 jego średnica wynosi

$$d_1 = d_0 [1 + \alpha (T_1 - T_0)], \quad (1)$$

gdzie α - stanowi średni (w przedziale temperatur od T_1 do T_2) współczynnik rozszerzalności liniowej dla miedzi.

Gdyby pręt ogrzać od temperatury T_0 do T_2 jego średnica wyniesie

$$d_2 = d_0 [1 + \alpha (T_2 - T_0)]. \quad (2)$$

Z (2) widać, że wskutek ogrzewania pręt powinien rozszerzać się, ale przeciwdziała temu otwór. Siła F , z którą otwór działa na pręt, jest równa sile, którą należy przyłożyć do pręta, aby zmniejszyć jego średnicę o wielkość

$$\Delta d = d_2 - d_1 = d_0 \alpha (T_2 - T_1). \quad (3)$$

Z prawa Hooke'a:

$$\frac{\Delta d}{d_0} = \frac{F}{S E}, \quad (4)$$

gdzie $S = \pi d_0 l$ stanowi powierzchnię boczną pręta. Łącząc (3) i (4) otrzymuje się

$$F = \pi l d_0 E \alpha (T_2 - T_1).$$

Po podstawieniu danych numerycznych

$$F = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 15 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 11,76 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \\ \times 17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \cdot 205 \text{ K} = 193,34 \cdot 10^2 \text{ N}.$$



Zadanie 30

Drut o przekroju $S = 10^{-6} \text{ m}^2$ i współczynniku rozszerzalności liniowej $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ obciążono w temperaturze $T_0 = 273 \text{ K}$ ciężarem $P = 980 \text{ N}$. Podczas ogrzewania drutu do temperatury $T_1 = 373 \text{ K}$ należało zmniejszyć obciążenie o $\Delta P = 255 \text{ N}$, aby nie spowodować dalszego wydłużania drutu.

Obliczyć moduł Younga na wydłużenie dla materiału drutu.

Rozwiązanie

Niech długość nie obciążonego drutu w temperaturze T_0 wynosi l_0 . Zgodnie z prawem Hooke'a długość tego drutu pod wpływem obciążenia (w temperaturze T_0) wyniesie:

$$l = l_0 \left(1 + \frac{P}{SE} \right).$$

Długość tego drutu w temperaturze T_0 pod wpływem obciążenia P_1

$$l_1 = l_0 \left(1 + \frac{P_1}{SE} \right).$$

Gdy drut, obciążony ciężarem P_1 , będzie ogrzany od temperatury T_0 do T_1 jego długość wyniesie:

$$l_K = l_1 [1 + \alpha (T_1 - T_0)] = l_0 [1 + \alpha (T_1 - T_0)] \left(1 + \frac{P_1}{SE} \right).$$

Zgodnie z warunkami zadania

$$l_K = l.$$

Zatem

$$l_0 [1 + \alpha (T_1 - T_0)] \left(1 + \frac{P_1}{SE} \right) = l_0 \left(1 + \frac{P}{SE} \right),$$

skąd

$$P_1 = \frac{P - SE\alpha (T_1 - T_0)}{1 + \alpha (T_1 - T_0)}.$$



czyli

$$\Delta P = P - P_1 = \frac{\alpha(T_1 - T_0)(P + SE)}{1 + \alpha(T_1 - T_0)}.$$

Z powyższego wyrażenia wynika, że:

$$E = \frac{\Delta P}{S\alpha(T_1 - T_0)} - \frac{1}{S}(P - \Delta P).$$

Po podstawieniu danych numerycznych

$$E = \frac{255 \text{ N}}{10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} \cdot 100 \text{ K}} - \frac{725 \text{ N}}{10^{-6} \text{ m}^2} = 21,2 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Zadanie 31

Na jakiej głębokości h pod powierzchnią jeziora masa właściwa ρ pęcherzyka powietrza będzie równa $n=1/100$ masy właściwej wody. Temperatura pęcherzyka powietrza wynosi $T_1 = 277 \text{ K}$, ciśnienie zewnętrzne na powierzchni jeziora $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Masa właściwa powietrza w warunkach normalnych $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$. Masa właściwa wody w temperaturze T_1

$$\rho_w = 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

Rozwiązanie

Niech ciśnienie pęcherzyka powietrza na głębokości h wynosi p . Zgodnie z równaniem stanu gazu gęstość pęcherzyka będzie równa

$$\rho = \frac{p\mu}{RT_1}, \quad (1)$$

gdzie μ jest masą cząsteczkową,

R - uniwersalną stałą gazową.

Gęstość powietrza w warunkach normalnych

$$\rho_0 = \frac{p_0\mu}{RT_0}.$$



Ciśnienie p pęcherzyka na głębokości h jest równe:

$$p = p_0 + h \rho_w g. \quad (3)$$

Zgodnie z warunkiem zadania

$$\rho = n \rho_w. \quad (4)$$

Łącząc wyrażenia od (1) do (4) otrzymuje się:

$$h = \frac{(n \rho_w T - \rho_0 T_0) p_0}{T_0 \rho_0 \rho_w g}.$$

Po podstawieniu danych numerycznych

$$h = \frac{(0,01 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 277 \text{ K} - 1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 273 \text{ K}) 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{273 \text{ K} \cdot 1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 70,7 \text{ m}.$$

Zadanie 32

Wykorzystując równanie Mendelejewa - Clapeyrona oraz fakt, że ciśnienie atmosferyczne zmienia się wraz z wysokością według zależności: $dp = -\rho g dh$, znaleźć ciśnienie na wysokości H . Gradient temperatury $\frac{dT}{dh} = -a$, gdzie $a = -0,006 \frac{\text{K}}{\text{m}}$, zaś temperatura i ciśnienie powietrza dla $h=0$ są równe odpowiednio T_0 i p_0 .

Rozwiązanie

Z warunków zadania

$$dT = -a dh,$$

czyli

$$T = -ah + C. \quad (1)$$

gdzie C jest stałą całkowania, dla której z warunków początkowych $h = 0$, $T = T_0$ wynika

$$C = T_0. \quad (2)$$



Łącząc (1) i (2) otrzymuje się

$$T = T_0 - ah. \quad (3)$$

Z równania Mendelejewa-Clapeyrona

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Zatem

$$dp = -\rho g dh = -\frac{p\mu g}{RT} dh. \quad (4)$$

Uwzględniając (3) w (4) oraz rozdzielaając zmienne otrzymuje się

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \cdot \frac{dh}{T_0 - ah}. \quad (5)$$

Całkowanie ostatniego równania

$$\int_{p_0}^{p_H} \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \int_0^H \frac{dh}{T_0 - ah}$$

daje następujące wyrażenie dla ciśnienia p_H na wysokości H

$$\ln \frac{p_H}{p_0} = \frac{\mu g}{a R} \ln \left(1 - \frac{aH}{T_0} \right).$$

Zadanie 33

Dwie jednakowe kule z inwaru połączone cienką rurką o bardzo małej pojemności cieplnej zawierają gaz o temperaturze $T = 293 \text{ K}$, pod ciśnieniem $p = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Gaz w jednej z kul oziębiono do temperatury $T_0 = 273 \text{ K}$, w drugiej ogrzano do $T_1 = 717,6 \text{ K}$. Obliczyć stosunek, w jakim rozdzielają się masy gazu w kulach oraz ciśnienie gazu, które zapanauje w tych kulach, po ustaleniu się równowagi termicznej wewnątrz nich.

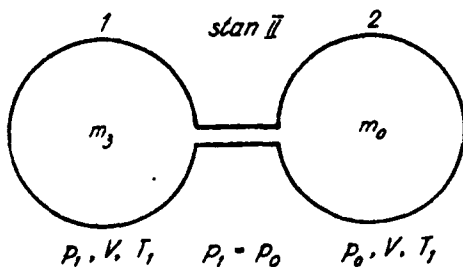
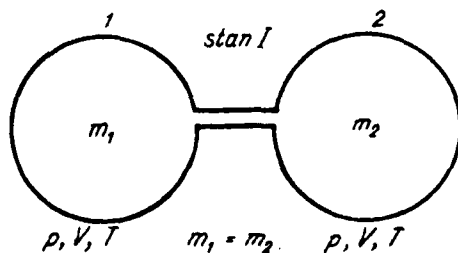
Rozwiązanie

Z równania Mendelejewa-Clapeyrona dla mas m_1 i m_2 gazu o temperaturze T i ciśnieniu p (stan I) zawartych w każdej z kul wynika bezpośrednio, że



$$m_1 = m_2,$$

czyli, że masy gazu są rozdzielone równomiernie w obu kulach.



Rys. 10

W stanie II (rys. 10) ciśnienie w obu kulach jest takie samo, gdyż kule te są ze sobą połączone. Objętości dla stanów I i II są również takie same, gdyż inwar niewiele rozszerza się, tak że można w tym przypadku przyjąć, że

$$p_1 V = m_3 \frac{R}{\mu} T_1 \quad (\text{dla kuli 1})$$

oraz

$$p_0 V = m_0 \frac{R}{\mu} T_0 \quad (\text{dla kuli 2}).$$



Ponieważ $p_1 = p_0$, to:

$$m_3 T_1 = m_0 T_0,$$

czyli

$$\frac{m_3}{m_0} = \frac{T_0}{T_1}. \quad (1)$$

Piszząc równanie Mendelejewa - Clapeyrona dla pierwszej kuli (rys. 10) w stanie I i II otrzymuje się

$$pV = \frac{m_3 + m_0}{2} \cdot \frac{R}{\mu} T$$

oraz

$$p_1 V = m_3 \frac{R}{\mu} T_1.$$

skąd

$$\frac{p_1}{p} = \frac{2 m_3 T_1}{(m_3 + m_0) T}. \quad (2)$$

Łącząc (1) i (2) dostaje się ostatecznie

$$p_1 = p \frac{2 T_0}{(T_0 + T_1)} \cdot \frac{T_1}{T}. \quad (3)$$

Podstawiając do (1) i (3) dane numeryczne otrzymuje się

$$\frac{m_3}{m_0} = \frac{273 \text{ K}}{717,6 \text{ K}} = 0,38,$$

$$p_1 = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{546 \text{ K}}{990,6 \text{ K}} \cdot \frac{717,6 \text{ K}}{293 \text{ K}} = 1,37 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Zadanie 34

Cylinder z tłokiem postawiono dnem do góry. Ciężar tłoka wynosi $P_1 = 19,62 \text{ N}$, powierzchnia $S = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. W stanie równowagi termicznej w temperaturze $T_1 = 100 \text{ K}$ powie-



trze w cylindrze nad tłokiem zajmuje objętość $V_1 = 10^{-2} \text{ m}^3$.
Do tłoka został przymocowany ciężar $P_2 = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ N}$.

Jak powinna zmieniać się temperatura T powietrza zamkniętego w cylindrze w zależności od czasu, aby ciśnienie p pozostawało stałe. Tarcie pominąć. Prędkość początkową ruchu tłoka przyjąć równą zero.

Rozwiązanie

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki, tłok z ciężarem o masie

$$m = \frac{P_1 + P_2}{g}$$

porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej z przyspieszeniem

$$a = \frac{P_2 g}{P_1 + P_2}.$$

Odległość x od dna cylindra do tłoka

$$x = x_1 + \frac{1}{2} a t^2,$$

gdzie $x_1 = \frac{V_1}{S}$ stanowi odległość tłoka od dna cylindra w chwili początkowej.

Z uwagi na stałość ciśnienia powietrza jego objętość $V = xS$ będzie zmieniać się z upływem czasu według zależności:

$$V = V_1 + \frac{P_2 g S}{2(P_1 + P_2)} t^2$$

skąd

$$\frac{V}{V_1} = 1 + \frac{P_2 g S}{2(P_1 + P_2) V_1} t^2. \quad (1)$$

Zgodnie z prawem Gay-Lussaca ($p = \text{const}$)

$$\frac{V}{V_1} = \frac{T}{T_1} \quad (2)$$



Łącząc (1) i (2) otrzymuje się

$$\frac{T}{T_1} = 1 + \frac{P_2 g S}{2(P_1 + P_2) V_1} t^2,$$

czyli

$$T = T_1 + \frac{P_2 g S r_1}{2(P_1 + P_2) V_1} t^2 \quad (3)$$

lub

$$T = c + b t^2, \quad (4)$$

gdzie

$$c = T_1 = 100 \text{ K},$$

$$b = \frac{P_2 g S T_1}{2(P_1 + P_2) V_1} = 4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{s}^2}.$$

Rozwiązanie dane równaniem (3) lub (4) jest prawdziwe, jeżeli podczas zmian objętości ciśnienie i temperatura powietrza nad tłokiem zdążą się wyrównać.

2.1.3. Zadania

Zadanie 35

Dwa jednakowe termometry napełniono w temperaturze T_0 jednakowymi objętościami rtęci i alkoholu. Znaleźć stosunek długości podziałki x , odpowiadającej jednemu stopniowi na skali termometru rtęciowego, do długości x_1 podziałki na skali termometru wypełnionego alkoholem. Współczynniki rozszerzalności objętościowej rtęci, alkoholu i szkła wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} \beta_r &= 181 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \\ \beta_a &= 110 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \\ \beta_{sz} &= 24 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie

$$\frac{x}{x_1} = \frac{\beta_r - \beta_{sz}}{\beta_a - \beta_{sz}} = 0,66.$$



Zadanie 36

Określić odległość Δl między dwoma sąsiednimi kreskami skali na termometrze z podziałką o skoku $k = 0,01$ stopnia, przeznaczonym do pomiaru temperatur od $T_0 = 273$ K do $T = 278$ K.

Średnica kapilary $d = 0,122 \cdot 10^{-3}$ m,

współczynnik rozszerzalności objętościowej dla rtęci $\beta = 181 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$,

objętość rtęci w zbiorniku termometru w temperaturze T_0 - $V_0 = 0,255 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$.

Rozszerzalność szkła pominąć.

Rozwiązanie

$$\Delta l = \frac{4 V_0 \beta k}{\pi \cdot d^2} \approx 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Zadanie 37

Znaleźć średnicę d rurki kapilarnej termometru, której długość dla skali od $T_0 = 273$ K do $T_1 = 323$ K wynosi $l = 7 \cdot 10^{-2}$ m. Objętość alkoholu etylowego w zbiorniku termometru w temperaturze T_0 jest równa $V_0 = 0,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$. Współczynnik rozszerzalności objętościowej dla alkoholu etylowego $\beta = 110 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Rozszerzalności rurki kapilarnej nie uwzględniać.

Rozwiązanie

$$d = 2 \sqrt{\frac{V_0 \beta (T_1 - T_0)}{\pi \cdot l}} = 0,265 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Zadanie 38

Kulkę stalową o masie m zawieszoną na nici zanurzono całkowicie w nafcie. Znaleźć zmianę wartości siły napięcia nici ΔN , jeżeli cały układ ogrzeje się od temperatury T_1 do



T_2 . Gęstości w temperaturze T_1 oraz współczynniki rozszerzalności objętościowej dla nafty i stali są równe odpowiednio: ρ_n, β_n oraz ρ_s, β_s .

Rozwiązanie

$$\Delta N = \rho_n \frac{m}{\rho_s} g \left[\frac{1 + \beta_s (T_2 - T_1)}{1 + \beta_n (T_2 - T_1)} - 1 \right].$$

Zadanie 39

Ciało stałe pływa w cieczy o temperaturze $T_0 = 273 \text{ K}$. Objętość zanurzenia w tych warunkach wynosi 0,98 objętości całego ciała. Po ogrzaniu całego układu do temperatury $T_1 = 298 \text{ K}$, ciało całkowicie zanurzyło się w cieczy. Współczynnik rozszerzalności objętościowej cieczy $\beta_c = 85 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Obliczyć współczynnik rozszerzalności objętościowej β_x ciała stałego.

Rozwiązanie

$$\beta_x = \frac{98 \beta_c (T_1 - T_0) - 2}{100 (T_1 - T_0)} = 26 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

Zadanie 40

Różnica długości dwóch prętów, żelaznego i cynkowego, jest stała i równa się $d = 0,1 \text{ m}$.

Obliczyć długości tych prętów w temperaturze $T_0 = 273 \text{ K}$, jeżeli współczynniki rozszerzalności liniowej żelaza i cynku są odpowiednio $\beta_1 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ i $\beta_2 = 29 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Rozwiązanie

Dla żelaza

$$l_{01} = \frac{d \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} = 17 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Dla cynku

$$l_{02} = \frac{d \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$



Zadanie 41

Masa rtęci wypełniającej dilatometr w temperaturze $T_0 = 273$ K wynosi $m = 67,98 \cdot 10^{-2}$ kg. Po ogrzaniu dilatometru w zlewce z wodą do temperatury $T = 323$ K stwierdzono, że wylało się z niego $M = 5,20 \cdot 10^{-3}$ kg rtęci.

Obliczyć współczynnik rozszerzalności objętościowej dilatometru β_x , jeżeli współczynnik rozszerzalności objętościowej dla rtęci

$$\beta = 181 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

Rozwiązanie

$$\beta_x = \frac{(m - M) \beta (T - T_0) - M}{m(T - T_0)} \approx 25 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

Zadanie 42

Pręt stalowy o polu przekroju $S = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ umocowano na stałe między dwiema ścianami w temperaturze $T_0 = 273$ K. O ile należy podwyższyć temperaturę pręta, aby siła sprężystości powstająca w pręcie $F = 9,4 \cdot 10^4$ N. Współczynnik rozszerzalności liniowej dla stali $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Moduł Younga dla stali $E = 19,6 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Rozwiązanie

$$\Delta T = \frac{F}{ES\alpha} = 19,1 \text{ K}.$$

Zadanie 43

Obliczyć masę m słupa powietrza o wysokości $h = 1000$ m i polu przekroju $S = 1 \text{ m}^2$, jeżeli gęstość powietrza przy powierzchni Ziemi $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$, ciśnienie $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, gradient ciśnienia $\frac{dp}{dh} = -\rho g$. Temperaturę uważać za stałą.



Rozwiązanie

$$m = \left[1 - \exp \left(- \frac{\rho_0}{p_0} gh \right) \right] \frac{S p_0}{g} \approx 1,13 \cdot 10^3 \text{ kg}.$$

Zadanie 44

Dętkę napełniono powietrzem do ciśnienia $p = 6,5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ przy temperaturze $T_1 = 288 \text{ K}$.

Obliczyć masę m powietrza, którą należy wypuścić z dętki, aby ciśnienie nie uległo zmianie, jeżeli temperatura gazu wzrośnie do $T_2 = 313 \text{ K}$. Pojemność dętki przyjąć stałą i równą $V = 0,05 \text{ m}^3$. Masa cząsteczkowa powietrza $\mu = 28,8 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$.

Uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Zadanie rozwiązać traktując powietrze jako gaz doskonały.

Rozwiązanie

$$m = \frac{\mu p V}{R T_1 T_2} (T_2 - T_1) \approx 4,46 \cdot 10^{-2} \text{ kg}.$$

Zadanie 45

Rurkę szklaną o długości $l = 0,75 \text{ m}$, zatopioną u góry, spuszczone pionowo na dno morza przy ciśnieniu zewnętrznym $p = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Stwierdzono, że woda w tej rurce osiągnęła wysokość $h = 0,70 \text{ m}$. Gęstość wody morskiej $\rho = 1028 \text{ kg/m}^3$, różnica temperatur jest nieznaczna. Obliczyć głębokość H morza.

Rozwiązanie

$$H = \left[\frac{p}{(1 - h)\rho g} + 1 \right] h \approx 141,3 \text{ m}.$$

Zadanie 46

Cylinder o wysokości $h = 0,1 \text{ m}$ i powierzchni dna $S = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ zawiera gaz o temperaturze $T_1 = 360 \text{ K}$. Cylin-



der zanurzono do wody, dnem do góry, tak że jego dno znajduje się na poziomie powierzchni wody.

Obliczyć objętość wody, która wejdzie do cylindra, jeżeli gaz w cylindrze przyjmie temperaturę wody $T_2 = 290 \text{ K}$. Ciśnienie zewnętrzne $p_0 = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Gęstość wody $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Rozwiązanie

$$V = S \left[H - \frac{p_0}{2\rho g} \left(\sqrt{1 + \frac{4HT_2\rho g}{p_0T_1}} - 1 \right) \right] = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3.$$

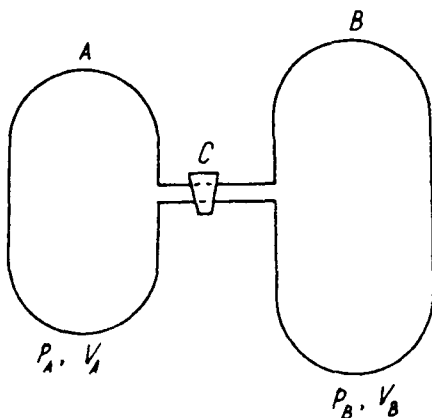
Zadanie 47

W zbiorniku A (rys. 11) o pojemności $V_A = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ znajduje się gaz pod ciśnieniem $p_A = 0,2 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, a w zbiorniku B o pojemności $V_B = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ - pod ciśnieniem $p_B = 0,1 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Obliczyć ciśnienie p gazu jeśli otworzy się kran C oddzielający zbiorniki. Założyć, że temperatura gazu w procesie mieszania się nie ulega zmianie.

Rozwiązanie

$$p = \frac{p_A V_A + p_B V_B}{V_A + V_B} = 1,44 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$



Zadanie 48

Tłoki dwóch jednakowych cylindrów połączone są ze sobą sztywną linką w taki sposób, że objętości pod tłokami są równe. W cylindrach znajdują się jednakowe ilości gazu o temperaturze T_0 .

Rys. 11

Obliczyć ciśnienie gazu w cylindrach, jeżeli jeden z ni
ogrzano do temperatury T_1 a drugi oziębiono do T_2 . Tarcie
ciężar tłoków pominąć. Ciśnienie zewnętrzne przyjmą równe

Rozwiązanie

$$p_I = \frac{2b \cdot T_1}{T_1 + T_2},$$

$$p_{II} = \frac{2b \cdot T_2}{T_1 + T_2}.$$

Zadanie 49

Obliczyć czas t potrzebny na to, aby dętkę o pojemności
 $V = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ napompować do ciśnienia $p_1 = 4,9 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, jeżeli
przy każdym suwie pompa ssie z atmosfery słup powietrza o
wysokości $h = 0,1 \text{ m}$ i średnicy $d = 0,1 \text{ m}$, a czas jednego suwu
wynosi $t_1 = 1,5 \text{ s}$. Temperatura nie ulega zmianie w procesie
pompowania.

Ciśnienie początkowe w dętce $p_0 = 9,8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Rozwiązanie

$$t = \frac{4 V (p_1 - p_0) t_1}{\pi d^2 h p_0} \approx 46 \text{ s}.$$

Zadanie 50

Cylinder zamknięty z obu końców napełniony gazem pod
ciśnieniem $p = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ o temperaturze $T = 303 \text{ K}$, rozdzielono
tłokiem ruchomym na dwie równe części o długości po $l = 0,5 \text{ m}$
każda.

O jaką wielkość ΔT należy podwyższyć temperaturę gazu w
jednej połowie cylindra, aby tłok przesunął się na odległość
 $h = 0,2 \text{ m}$, jeżeli w drugiej połowie cylindra temperatura nie
ulega zmianie. Wyznaczyć ciśnienie p_1 gazu po przesunięciu
tłoka.

Rozwiązanie

$$\Delta T = \frac{2T \cdot h}{1 - h} = 404 \text{ K},$$

$$p_1 = \frac{1}{1 - h} p = 1,67 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

2.2. Kinetyczna teoria gazów

2.2.1. Wstęp

Podstawowym równaniem kinetycznej teorii gazów (dla ciśnienia) jest równanie Clausiusa:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \overline{E}_K,$$

gdzie n_0 - liczba cząsteczek w jednostce objętości,

$\overline{E}_K$ - średnia energia kinetyczna ruchu postępowego jednej cząsteczki.

Dla ciśnienia p mieszaniny n gazów doskonałych, według prawa Daltona, otrzymuje się:

$$p = \sum_{i=1}^n p_i,$$

gdzie p_i - ciśnienie cząstkowe i -tego składnika mieszaniny

Podstawowym równaniem kinetycznej teorii gazów (dla energii) jest równanie Boltzmanna:

$$\overline{E}_K = \frac{3}{2} kT,$$

gdzie k - stała Boltzmannna,

T - temperatura gazu.



Prędkość średnia kwadratowa cząsteczek

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 kT}{m_0}},$$

gdzie μ - masa jednego kilomola gazu,

m_0 - masa jednej cząsteczki gazu,

R - uniwersalna stała gazowa.

Prędkość średnia arytmetyczna cząsteczek

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8 kT}{\pi m_0}}.$$

Prędkość najbardziej prawdopodobna cząsteczek

$$v_p = \sqrt{\frac{2 RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 kT}{m_0}}.$$

Prawo Maxwella rozkładu prędkości cząsteczek

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 \Delta u,$$

gdzie N - ogólna liczba cząsteczek,

ΔN - liczba cząsteczek, których prędkości względne mieszczą się w przedziale od u do $u + \Delta u$,

$$u = v/v_p,$$

v - prędkość danej cząstki,

Δu - wielkość przedziału prędkości względnych, (mała w porównaniu z prędkością u).

Średnia droga swobodna cząsteczek gazu

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_0} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p},$$

gdzie $\bar{v}$ - średnia arytmetyczna prędkość cząsteczek,

$\bar{z}$ - średnia liczba zderzeń każdej cząsteczki z pozostałymi cząsteczkami w jednostce czasu,



- d - średnica czynna (efektywna) cząsteczki,
 n_0 - liczba cząsteczek w jednostce objętości,
 k - stała Boltzmanna,
 p - ciśnienie gazu,

Jeżeli w zbiorniku wypełnionym gazem znajduje się bardzo mały otwór o powierzchni S , przez który cząsteczki gazu wylatują do otaczającej zbiornik próżni, to średnia liczba cząsteczek gazu dN wydostających się w czasie dt przez otworek jest równa:

$$- \frac{dN}{dt} = \frac{1}{4} S \bar{v} n_0,$$

gdzie n_0 - średnia liczba cząsteczek w jednostce objętości,
 $\bar{v}$ - prędkość średnia arytmetyczna cząsteczek.

Współczynnik dyfuzji

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda.$$

Współczynnik tarcia wewnętrznego (lepkości dynamicznej)

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho,$$

gdzie ρ - gęstość gazu.

Współczynnik przewodnictwa cieplnego

$$K = \frac{1}{3} \bar{v} c_v \rho,$$

gdzie c_v - ciepło właściwe gazu przy stałej objętości.

Wilgotność względna

$$W = \frac{\rho}{\rho_n},$$

gdzie ρ - gęstość pary wodnej zawartej w powietrzu wdanej temperaturze,

ρ_n - gęstość nasyconej pary wodnej w tej samej temperaturze.



Cisnienie pary wodnej zawartej w powietrzu jest proporcjonalne do jej gęstości, zatem ostatnią równość można zastąpić wyrażeniem

$$w = \frac{p}{p_n},$$

gdzie p - ciśnienie pary wodnej znajdującej się w powietrzu w danej temperaturze,

p_n - ciśnienie nasyconej pary wodnej w tej samej temperaturze.

2.2.2. Przykłady

Zadanie 51

W zbiorniku o pojemności $V = 2 \text{ m}^3$ znajduje się mieszanina tlenu (O_2) i dwutlenku siarki (SO_2) o temperaturze $T = 373 \text{ K}$ i ciśnieniu $p_m = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Obliczyć ciśnienie cząstkowe składników mieszaniny, jeżeli masa dwutlenku siarki $m = 8 \text{ kg}$. Masa cząsteczkowa siarki $\mu = 64,064 \text{ kg/kmol}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K kmol}}$.

Rozwiązanie

Z równania Mendelejewa-Clapeyrona dla mieszaniny gazu

$$p_m V = \left(\frac{m_x}{\mu_x} + \frac{m}{\mu} \right) RT$$

otrzymuje się masę m_x tlenu zawartego w mieszaninie

$$m_x = \left(\frac{p_m V}{RT} - \frac{m}{\mu} \right) \mu_x, \quad (4)$$

gdzie μ_x - masa cząsteczkowa tlenu.

Cisnienie cząstkowe tlenu

$$p_1 = \frac{m_x}{\mu_x} \cdot \frac{RT}{V}$$



lub, z uwagi na (1),

$$p_1 = p_m - \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V}. \quad (2)$$

Ciśnienie cząstkowe siarki

$$p_2 = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V}. \quad (3)$$

Podstawiając do (3) i (2) dane numeryczne otrzymuje się:

$$p_2 = \frac{8 \text{ kg } 10^3 \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kmol}} 373 \text{ K}}{64,064 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} 2 \text{ m}^3} = 1,9 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

$$p_1 = 4,0 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} - 1,9 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Zadanie 52

Określić gęstość powietrza w temperaturze $T = 298 \text{ K}$, o ciśnieniu normalnym $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ i wilgotności względnej $W = 60\%$.

Ciśnienie nasyconej pary wodnej w temperaturze T jest równe $p_n = 3167,7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Masa cząsteczkowa pary wodnej $\mu = 18 \text{ kg/kmol}$. Gęstość powietrza w warunkach normalnych $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kmol}}$.

Rozwiązanie

Pod pojęciem gęstości powietrza rozumie się gęstość mieszaniny powietrza i pary wodnej.

$$\rho = \frac{m_p + m_{pw}}{V} = \rho_p + \rho_{pw}.$$

(1)



gdzie m_p i ρ_p - oznaczają odpowiednio masę i gęstość powietrza,

m_{pw} i ρ_{pw} - masę i gęstość pary wodnej.

Z równania Mendelejewa-Clapeyrona

$$\rho_p = \rho_0 \frac{p T_0}{p_0 T} \quad (2)$$

Ciśnienie p powietrza, zgodnie z prawem Daltona,

$$p = p_0 - W p_n \quad (3)$$

Gęstość pary wodnej

$$\rho_{pw} = \frac{\mu p_{pw}}{R T}$$

czyli, z uwagi na definicję wilgotności względnej

$$\rho_{pw} = \frac{\mu W p_n}{R T} \quad (4)$$

Podstawiając do (1) wartości z (2), (3) i (4) otrzymuje się ostatecznie

$$\rho = \rho_0 \frac{(p_0 - W p_n) T_0}{p_0 T} + \frac{\mu W p_n}{R T}$$

Po podstawieniu danych numerycznych

$$\rho = 1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\left(1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} - \frac{6}{10} \cdot 3167,7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right) 273 \text{ K}}{1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} 298 \text{ K}} +$$

$$+ \frac{18 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \frac{6}{10} \cdot 3167,7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} 298 \text{ K}} = 1,18 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$



Zadanie 53

Przy temperaturze $T = 288 \text{ K}$, ciśnienie powietrza w lampie rentgenowskiej wynosi $p = 1,33,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Ile razy długość drogi swobodnej elektronów, w tych warunkach, jest większa od odległości $l = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ między katodą i antykatodą? Przyjmąc, że średnia droga swobodna elektronów w powietrzu jest $n = 5,7$ razy większa od średniej drogi swobodnej dla cząsteczek powietrza. Efektywna średnica cząsteczki powietrza $d = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Stała Boltzmanna $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

Rozwiązanie

Średnia droga swobodna cząsteczek powietrza

$$\bar{\lambda}_p = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}.$$

Średnia droga swobodna elektronów w lampie rentgenowskiej, zgodnie z warunkami zadania,

$$\bar{\lambda} = n \bar{\lambda}_p = \frac{nkT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}.$$

Wobec tego

$$\frac{\bar{\lambda}}{l} = \frac{nkT}{\sqrt{2} \pi d^2 p l}. \quad (1)$$

Podstawiając dane numeryczne do (1) otrzymuje się ostatecznie

$$\frac{\bar{\lambda}}{l} = \frac{5,7 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 288 \text{ K}}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot 9 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \cdot 133,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 8550.$$

Zadanie 54

W naczyniu z argonem ciśnienie $p = 133,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.



Znaleźć gęstość argonu w naczyniu, liczbę cząsteczek w jednostce objętości naczynia, średnią drogę swobodną cząsteczek oraz lepkość dynamiczną.

Efektywna średnica cząstki argonu $d = 2,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}$;

masa jednego kilomola $\mu = 39,95 \text{ kg/kmol}$.

Temperatura argonu $T = 290 \text{ K}$.

Stała Boltzmanna $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kmol}}$.

Rozwiązanie

Z równania Mendelejewa-Clapeyrona

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (1)$$

wynika, że

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}. \quad (2)$$

Jednocześnie z (1) otrzymuje się:

$$pV = \frac{m_0 N}{m_0 N_A} = NkT, \quad (3)$$

gdzie m_0 - masa pojedynczej cząsteczki argonu,

N - liczba cząsteczek argonu w objętości V ,

N_A - liczba Avogadro.

Z (3) wynika bezpośrednio, że liczba cząsteczek argonu w jednostce objętości

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT}. \quad (4)$$

Średnia droga swobodna cząsteczek argonu

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_0}. \quad (5)$$

Współczynnik lepkości dynamicznej

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \rho \sqrt{\frac{6RT}{\pi \mu}}. \quad (6)$$



Uwzględniając w (6) wartości dla $\bar{\lambda}$ i ρ podane w (5) i (2) otrzymuje się ostatecznie

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{k}{d^2} \sqrt{\frac{\mu T}{\pi^3 R}} \quad (7)$$

Podstawiając do (2), (4), (5) i (7) podane w zadaniu wartości numeryczne otrzymuje się:

$$\rho = \frac{39,95 \text{ kg/kmol} \cdot 133,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kmol}} \cdot 290 \text{ K}} = 221 \cdot 10^{-11} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$n_0 = \frac{133,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 290 \text{ K}} = 33,3 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{m}^3},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (2,9)^2 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \cdot 33,3 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{m}^3}} = 74 \text{ m},$$

$$\eta = \frac{2}{3} \cdot \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}}{(2,9)^2 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2} \sqrt{\frac{39,95 \text{ kg/kmol} \cdot 290 \text{ K}}{(3,14)^3 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}}} =$$

$$= 2,32 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}.$$

Zadanie 55

Jaka część cząsteczek dwutlenku siarki, przy temperaturze $T = 473 \text{ K}$, posiada prędkości zawarte w przedziałach: od $v_1 = 210 \text{ m/s}$ do $v_1 + \Delta v = 220 \text{ m/s}$ oraz $v_2 = 420 \text{ m/s}$ do $v_2 + \Delta v = 430 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Masa cząsteczkowa dwutlenku siarki $\mu = 64,07 \text{ kg/kmol}$.

Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.



Rozwiązanie

Prędkość najbardziej prawdopodobna cząsteczek dwutlenku siarki

$$v_p = \sqrt{\frac{2 RT}{\mu}} \quad (1)$$

Prędkości względne

$$u_1 = \frac{v_1}{v_p} = \frac{v_1}{\sqrt{\frac{2 RT}{\mu}}} \quad (2)$$

$$u_2 = \frac{v_2}{v_p} = \frac{v_2}{\sqrt{\frac{2 RT}{\mu}}} \quad (3)$$

Wielkość przedziału prędkości względnych

$$\Delta u_1 = \Delta u_2 = \Delta u = \frac{\Delta v}{\sqrt{\frac{2 RT}{\mu}}} \quad (4)$$

Zgodnie z prawem Maxwella rozkładu prędkości, liczba cząsteczek poruszających się z prędkościami zawartymi w podanych przedziałach wyniesie

$$\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\mu v_1^2}{2 RT} \cdot \frac{\Delta v}{\sqrt{\frac{2 RT}{\mu}}} \exp \left(-\frac{\mu v_1^2}{2 RT} \right) \quad (5)$$

$$\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\mu v_2^2}{2 RT} \cdot \frac{\Delta v}{\sqrt{\frac{2 RT}{\mu}}} \exp \left(-\frac{\mu v_2^2}{2 RT} \right) \quad (6)$$

Podstawiając do równań od (1) do (6) dane numeryczne otrzymuje się

$$\begin{aligned} v_p &= 350 \text{ m/s}; \quad u_1 = 0,6; \quad u_2 = 1,2; \quad u_1^2 = 0,36; \\ u_2^2 &= 1,44; \quad \Delta u = 0,0286; \quad \left(\frac{\Delta N}{N}\right)_1 = 1,6\%; \\ \left(\frac{\Delta N}{N}\right)_2 &= 2,2\%. \end{aligned}$$



Zadanie 56

Naczynie podzielone jest przegrodą na dwie równe części o pojemności V . W jednej części znajduje się hel, w drugiej zaś argon o tym samym ciśnieniu p i temperaturze T . Gazy w naczyniu są silnie rozrzedzone (średnia droga swobodna jest duża w porównaniu z rozmiarami naczynia). W chwili $t = 0$ w przegrodzie powstaje niewielki otworek o powierzchni S .

Znaleźć ciśnienie w obu częściach naczynia w zależności od czasu. Temperaturę gazu w czasie procesu przyjąć za stałą. Masy cząsteczkowe helu i argonu są równe odpowiednio: μ_1 i μ_2 , uniwersalna stała gazowa - R .

Rozwiązanie

Niech $N_{\text{He}}^{(1)}$ i $N_{\text{He}}^{(2)}$ oznaczają liczby cząsteczek helu w pierwszej i w drugiej połowie naczynia, wówczas różnica $dN_{\text{He}}^{(1)}$ między liczbą cząsteczek przebiegających przez powierzchnię S z części pierwszej do drugiej i z drugiej do pierwszej w pewnym dowolnym odstępie czasu dt wynosi

$$\frac{dN_{\text{He}}^{(1)}}{dt} = -\frac{1}{4} \frac{S \bar{v}_{\text{He}}}{V} \left(N_{\text{He}}^{(1)} - N_{\text{He}}^{(2)} \right). \quad (1)$$

Analogicznie, różnica $dN_{\text{He}}^{(2)}$ między liczbą cząsteczek helu przebiegających przez powierzchnię S z części drugiej do pierwszej i z pierwszej do drugiej w czasie dt wynosi

$$\frac{dN_{\text{He}}^{(2)}}{dt} = -\frac{1}{4} \frac{S \bar{v}_{\text{He}}}{V} \left(N_{\text{He}}^{(2)} - N_{\text{He}}^{(1)} \right). \quad (2)$$

Ponieważ $N_{\text{He}}^{(1)} + N_{\text{He}}^{(2)} = N_{\text{He}} = \text{const}$, to

$$N_{\text{He}}^{(1)} - N_{\text{He}}^{(2)} = 2 \left(N_{\text{He}}^{(1)} - \frac{N_{\text{He}}}{2} \right). \quad (3)$$



Uwzględniając (3) w (1) otrzymuje się

$$\frac{d N_{\text{He}}^{(1)}}{dt} = - \frac{1}{2} \frac{S \bar{v}_{\text{He}}}{V} \left(N_{\text{He}}^{(1)} - \frac{N_{\text{He}}}{2} \right). \quad (4)$$

Całkując powyższe równanie z warunkiem początkowym $N_{\text{He}}^{(1)} = N_{\text{He}}$ dla $t = 0$ dostaje się

$$N_{\text{He}}^{(1)} = \frac{N_{\text{He}}}{2} \left[1 + \exp \left(- \frac{S \bar{v}_{\text{He}}}{2 V} t \right) \right], \quad (5)$$

wobec czego liczba cząsteczek helu, które po czasie t znajdą się w drugiej części naczynia wyniesie

$$N_{\text{He}}^{(2)} = \frac{N_{\text{He}}}{2} \left[1 - \exp \left(- \frac{S \bar{v}_{\text{He}}}{2 V} t \right) \right]. \quad (6)$$

Powtarzając powyższe rozumowanie dla cząsteczek argonu otrzymuje się

$$N_{\text{A}}^{(1)} = \frac{N_{\text{A}}}{2} \left[1 - \exp \left(- \frac{S \bar{v}_{\text{A}}}{2 V} t \right) \right], \quad (7)$$

$$N_{\text{A}}^{(2)} = \frac{N_{\text{A}}}{2} \left[1 + \exp \left(- \frac{S \bar{v}_{\text{A}}}{2 V} t \right) \right]. \quad (8)$$

Ponieważ początkowe wartości ciśnienia w obu częściach naczynia są jednakowe, to $N_{\text{He}} = N_{\text{A}} = N$. Ciśnienie w pierwszej połowie naczynia będzie równe

$$p_1 = \frac{1}{V} \left(N_{\text{He}}^{(1)} + N_{\text{A}}^{(1)} \right) kT,$$

lub, z uwagi na (5) i (7),

$$p_1 = p \left[1 + \frac{e^{-ct} - e^{-dt}}{2} \right], \quad (9)$$

Biorąc pod uwagę (6) i (8) otrzymuje się ciśnienie p_2 w drugiej połowie naczynia:



$$p_2 = p \left[1 + \frac{e^{-dt} - e^{-ct}}{2} \right], \quad (10)$$

gdzie c i d występujące w (9) i (10) są:

$$c = \frac{S \bar{v}_{\text{He}}}{2 V} = \frac{S}{2 V} \sqrt{\frac{8 RT}{\pi \mu_1}},$$

$$d = \frac{S \bar{v}_A}{2 V} = \frac{S}{2 V} \sqrt{\frac{8 RT}{\pi \mu_2}}.$$

2.2.3. Zadania

Zadanie 57

W balonie o pojemności $V = 2 \text{ m}^3$ znajduje się mieszanina azotu i tlenu azotu.

Obliczyć masę m_x tlenu azotu jeżeli masa mieszaniny $m = 14 \text{ kg}$, temperatura $T = 300 \text{ K}$, ciśnienie $p = 6,0 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Masy cząsteczkowe azotu i tlenu azotu są równe odpowiednio: $\mu_1 = 28,0 \text{ kg/kmol}$, $\mu_2 = 30,0 \text{ kg/kmol}$.

Rozwiązanie

$$m_x = \left(m \mu_2 - \frac{pV}{RT} \mu_1 \mu_2 \right) \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} = 12 \text{ kg}.$$

Zadanie 58

W pomieszczeniu zamkniętym o pojemności $V = 60 \text{ m}^3$ wilgotność względna $W = 50\%$, przy temperaturze $T = 291 \text{ K}$.

Obliczyć masę wody m , która powinna wyparować w takiej objętości, aby zawarta w niej para wodna stała się nasycona. Ciśnienie nasyconej pary wodnej w temperaturze T wynosi $p_n = 2063,8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Masa cząsteczkowa pary wodnej $\mu = 18 \text{ kg/kmol}$.



Rozwiązanie

$$m = \frac{\mu p_n \cdot V}{RT} (1 - W) \approx 0,46 \text{ kg.}$$

Zadanie 59

Pod ciśnieniem p i w temperaturze $T_0 = 273 \text{ K}$ średnia droga swobodna cząsteczek tlenu wynosi $\bar{\lambda} = 9,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. Jaka będzie średnia liczba zderzeń $\bar{z}$ cząsteczki tlenu w ciągu 1 sekundy, jeżeli po odpompowaniu ciśnienia w naczyniu zmniejszy się do $n = 0,01$ ciśnienia początkowego p , a temperatura nie ulegnie zmianie. Masa jednego kilomola tlenu $\mu = 32 \text{ kg/kmol}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kmol}}$.

Rozwiązanie

$$\bar{z} = \frac{\sqrt{\frac{8 RT_0}{\pi \mu}}}{\bar{\lambda} \cdot n} = 4,5 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{s}}.$$

Zadanie 60

W temperaturze $T = 320 \text{ K}$ i przy pewnym ciśnieniu średnia droga swobodna cząsteczek tlenu jest równa $\bar{\lambda} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. W wyniku izotermicznego sprężania objętość gazu zmniejszyła się $n = 2$ razy. Znaleźć średnią liczbę zderzeń $\bar{z}$ jednej cząsteczki tlenu w ciągu jednej sekundy po zakończeniu tego procesu. Masa cząsteczkowa tlenu $\mu = 32 \text{ kg/kmol}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$\bar{z} = \frac{n}{\bar{\lambda}} \sqrt{\frac{8 RT}{\pi \mu}} = 2,3 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{s}}.$$



Zadanie 61

Znaleźć prędkość średnią kwadratową cząsteczek gazu, którego gęstość $\rho = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3$, ciśnienie $p = 3,6 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Rozwiązanie

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 600 \text{ m/s}.$$

Zadanie 62

Znaleźć prędkość średnią kwadratową dla cząsteczek powietrza znajdującego się pod ciśnieniem $p = 1,5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, jeżeli wiadomo, że średnia droga swobodna jego cząsteczek $\bar{\lambda} = 6,76 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. Efektywna średnica cząsteczek powietrza $d = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, masa jednego kilomola powietrza $\mu = 28,8 \text{ kg/kmol}$. Stała Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$.

Rozwiązanie

$$\sqrt{v^2} = \left(\frac{\sqrt{2} \pi N_A d^2 p \bar{\lambda}}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} = 290,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Zadanie 63

Jaki procent cząsteczek argonu o temperaturze $T = 393 \text{ K}$ porusza się z prędkościami zawartymi w przedziale od $v = 550 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ do $v + \Delta v = 647 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Masa cząsteczkowa argonu $\mu = 39,95 \text{ kg/kmol}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\mu^{\frac{3}{2}} v^2}{(2 RT)^{\frac{3}{2}}} \Delta v \exp \left(- \frac{\mu v^2}{2 RT} \right) \approx 12 \%$$



Zadanie 64

Naczynie o pojemności $V = 10^{-3} \text{ m}^3$ zamknięte kranikiem o powierzchni otworu $S = 10^{-10} \text{ m}^2$ zawiera powietrze pod ciśnieniem $p_1 = 1,33 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Po jakim czasie t , od chwili otwarcia kranu, ciśnienie powietrza w naczyniu osiągnie wartość $p_2 = 1,33 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, jeżeli ciśnienie powietrza na zewnątrz naczynia $p_0 = 101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, a temperatura $T = 293 \text{ K}$.

Temperaturę powietrza wewnątrz naczynia uważać za stałą i równą temperaturze otoczenia. Masa pojedynczej cząsteczki powietrza $m_0 = 4,81 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Stała Boltzmanna $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

Rozwiązanie

$$t = \frac{4 V}{S \sqrt{\frac{8 k T}{\pi m_0}}} \ln \frac{p_0 - p_1}{p_0 - p_2} \approx 1,17 \text{ s.}$$

Zadanie 65

Znaleźć dla azotu w warunkach normalnych ($T_0 = 273,15 \text{ K}$, $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$) współczynniki: dyfuzji- D , lepkości dynamicznej- η , przewodnictwa cieplnego- K . Efektywna średnica cząsteczki azotu $d = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, masa cząsteczkowa $\mu = 28,02 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$, ciepło właściwe azotu przy stałej objętości $c_v = 741 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$, stała Boltzmanna $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

Rozwiązanie

$$D = \frac{2}{3} \frac{k}{p_0 d^2} \sqrt{\frac{R T_0^3}{\pi^3 \mu}} = 1358 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{k}{d^2} \sqrt{\frac{T_0 \mu}{\pi^3 R}} = 16,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}},$$



$$K = \frac{2}{3} \frac{k c_v}{d^2} \sqrt{\frac{T_0 \mu}{3 R}} = 1,23 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s} \cdot \text{K}}.$$

Zadanie 66

W zbiorniku znajduje się azot o temperaturze $T = 293 \text{ K}$ pod ciśnieniem $p = 1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Obliczyć średnią liczbę ΔN cząsteczek azotu padających na powierzchnię $S = 10^{-4} \text{ m}^2$ ściany zbiornika w czasie $t = 1 \text{ s}$. Masa jednej cząsteczki azotu $m_0 = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, stała Boltzmann $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

Rozwiązanie

$$\Delta N = \frac{1}{2} p S t \sqrt{\frac{2}{\pi m_0 k T}} = 2,9 \cdot 10^{23}.$$

Zadanie 67

Bańka szklana o pojemności $V = 10^{-3} \text{ m}^3$ zawiera argon o temperaturze $T = 300 \text{ K}$ i ciśnieniu $p = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. W chwili $t=0$ powstaje w bańce mała dziura o średnicy $d = 10^{-6} \text{ m}$.

W jakim czasie t ucieknie z bańki 1 % cząsteczek znajdującego się w niej gazu do otaczającej bańkę próżni. Masa cząsteczkowa argonu $\mu = 39,9 \text{ kg/kmol}$, uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$t = \frac{8 V \ln \left(\frac{100}{99} \right)}{d^2 \sqrt{\frac{2 \pi R T}{\mu}}} \approx 1,28 \cdot 10^5 \text{ s}.$$



2.3. Termodynamika

2.3.1. Wstęp

Pierwszą zasadę termodynamiki można zapisać w postaci:

$$\delta Q = dU + \delta L,$$

gdzie δQ - ilość ciepła dostarczona do układu,

dU - zmiana energii wewnętrznej układu,

$\delta L = p dV$ - praca wykonana przez siły działające ze strony układu na ciała zewnętrzne.

Zmiana energii wewnętrznej gazu doskonałego

$$dU = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{z}{2} R dT = \frac{z}{2} N k dT,$$

gdzie z - liczba stopni swobody cząsteczki gazu,

dT - zmiana temperatury gazu,

N - liczba cząsteczek gazu.

Ciepło molowe gazu w stałej objętości

$$C_v = \frac{z}{2} R = \frac{z}{2} k N_A = \mu c_v,$$

gdzie $c_v = \frac{z}{2} \frac{k}{m_0}$ jest ciepłem właściwym gazu w stałej objętości,

m_0 - masa pojedynczej cząsteczki gazu.

Ciepło molowe gazu pod stałym ciśnieniem (wzór Mayera)

$$C_p = C_v + R = \frac{z+2}{2} R = \frac{z+2}{2} k N_A = \mu c_p,$$

gdzie $c_p = \frac{z+2}{2} \cdot \frac{k}{m_0}$ jest ciepłem właściwym gazu pod stałym ciśnieniem.

Praca wykonana przy izotermicznej zmianie objętości gazu

$$L = RT \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$



Praca wykonana podczas przemiany izobarycznej

$$L = p(V_2 - V_1).$$

Równanie przemiany adiabatycznej (równanie Poissona)

$$pV^{\kappa} = \text{const},$$

a więc

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa}$$

lub

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$$

gdzie

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{z+2}{z}.$$

Pracę wykonaną przy adiabatycznej zmianie objętości gazu można wyznaczyć z wzoru

$$\begin{aligned} L &= \frac{RT_1}{\kappa-1} \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} \right] = \\ &= \frac{RT_1}{\kappa-1} \frac{m}{\mu} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{p_1 V_1 (T_1 - T_2)}{(\kappa-1) T_1}, \end{aligned}$$

gdzie p_1 i V_1 - ciśnienie i objętość gazu w temperaturze T_1 .

Równanie przemiany politropowej ma postać

$$pV^n = \text{const},$$

gdzie n - wykładnik politropy. .



2) Energia swobodna

$$F = U - TS.$$

Z definicji energii swobodnej wynika, że praca wykonana przez układ w odwracalnej przemianie izotermicznej jest równa ubytkowi energii swobodnej układu

$$-(dF)_T = dL.$$

3) Potencjał termodynamiczny G, zdefiniowany wzorem:

$$G = U - TS + pV = H - TS.$$

Zmiana temperatury ΔT podczas przemiany fazowej z jednego stanu złożonego do drugiego stanu przy zmianie ciśnienia o Δp określona jest wzorem Clapeyrona-Clausiusa:

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{(v_2 - v_1)T}{L_p},$$

gdzie

v_1 i v_2 - objętości właściwe substancji w obu stanach,

T - temperatura przemiany substancji z jednego stanu w drugi,

L_p - ciepło właściwe przemiany.

2.3.2. Przykłady

Zadanie 68

Pewną objętość tlenu o temperaturze $T = 300$ K i ciśnieniu $p = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ zwiększono dwukrotnie: a) izotermicznie, b) adiabatycznie.

Obliczyć jak się zmieniła średnia kwadratowa prędkość cząsteczek oraz liczba cząsteczek gazu w jednostce objętości, jeżeli masa cząsteczkowa tlenu $\mu = 32$ kg/kmol, uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$, stała Boltzmanna $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$, wykładnik adiabaty dla tlenu $\kappa = 1,4$.

Rozwiązanie

a) W przemianie izotermicznej temperatura jest stała, zatem średnia kwadratowa prędkość cząsteczki nie ulegnie zmianie

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 RT}{\mu}}. \quad (1)$$

Liczba cząsteczek w jednostce objętości zmieni się z n_0 na n'_0 , przy czym

$$\frac{n'_0}{n_0} = \frac{\frac{p_1}{kT}}{\frac{p}{kT}} = \frac{p_1}{p}. \quad (2)$$

Według prawa Boyle'a-Mariotte'a i warunków zadania

$$\frac{p_1}{p} = \frac{V}{V_1} = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Porównując (2) i (3) otrzymuje się:

$$n'_0 = n_0 \frac{V}{V_1} = \frac{1}{2} n_0 = \frac{1}{2} \frac{p}{kT}. \quad (4)$$

b) W przemianie adiabatycznej, przy zmianie objętości od V do V_2 , temperatura zmieni się od T do T_2 , przy czym, zgodnie z równaniem Poissona

$$TV^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1},$$

skąd

$$T_2 = T \left(\frac{V}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T \left(\frac{1}{2} \right)^{\gamma-1}. \quad (5)$$

Średnia prędkość kwadratowa po przemianie adiabatycznej

$$\sqrt{\overline{v_1^2}} = \sqrt{\frac{3 RT_2}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 RT}{\mu 2^{\gamma-1}}}. \quad (6)$$



Aby obliczyć liczbę cząsteczek n_0'' w jednostce objętości po przemianie adiabatycznej, należy znać ciśnienie końcowe p_2 . Z równania Poissona

$$pV^\chi = p_2V_2^\chi,$$

czyli

$$p_2 = p \left(\frac{V}{V_2} \right)^\chi. \quad (7)$$

a zatem

$$n_0'' = \frac{p_2}{kT_2}$$

lub po uwzględnieniu (5) i (7)

$$n_0'' = \frac{p \left(\frac{V}{V_2} \right)^\chi}{kT \left(\frac{V}{V_2} \right)^{\chi-1}} = \frac{1}{2} \frac{p}{kT}. \quad (8)$$

Z (4) i (8) widać, że po przemianach izotermicznej i adiabatycznej jednostka objętości gazu będzie zawierała tę samą liczbę cząsteczek, gdyż w obydwu przypadkach gaz zwiększył swoją objętość dwukrotnie.

Podstawiając do (1), (4) i (6) dane numeryczne otrzymuje się

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot 300 \text{ K}}{32 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \cdot \text{kmol} \cdot \text{K}}} = 483,56 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$n_0' = n_0'' = \frac{1}{2} \frac{1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K}} = 1,225 \cdot 10^{25} \frac{1}{\text{m}^3},$$

$$\sqrt{v_1^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,314 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot 227,3 \text{ K}}{32 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \cdot \text{kmol} \cdot \text{K}}} = 420,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Zadanie 69

W izotermicznym procesie rozprężania masy $m = 1,2 \text{ kg}$ azotu zużyto ilość ciepła $Q = 1,2 \cdot 10^5 \text{ J}$.

Obliczyć ile razy zmieniło się ciśnienie azotu, jeżeli jego temperatura $T = 280 \text{ K}$, masa cząsteczkowa $\mu = 28 \text{ kg/kmol}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

Z pierwszej zasady termodynamiki, dla $T = \text{const}$, wynika że:

$$Q = L. \quad (1)$$

przy czym

$$\delta L = p dV. \quad (2)$$

Z równania Mendelejewa-Claapeyrona

$$p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}. \quad (3)$$

Uwzględniając (3) w (2) otrzymuje się

$$\delta L = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V},$$

wobec czego

$$L = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

lub, z uwagi na prawo Boyle'a-Mariotte'a

$$L = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (4)$$

Podstawiając (4) do (1) otrzymuje się

$$\frac{p_1}{p_2} = \exp\left(\frac{\mu Q}{mRT}\right). \quad (5)$$

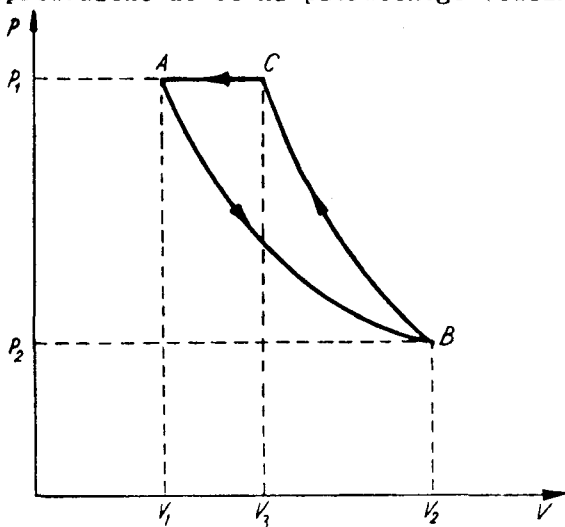
Z wyrażenia (5), po podstawieniu danych numerycznych wynika, że

$$\frac{p_1}{p_2} = \exp\left(\frac{28 \text{ kg/kmol} \cdot 1,2 \cdot 10^5 \text{ J}}{2 \text{ kg} \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 280 \text{ K}}\right) \approx 2.$$



Zadanie 70

Podczas izotermicznego rozprężania się masy $m = 1$ kg powietrza przy temperaturze $T = 500$ K jego ciśnienie zmniejszyło się $n = 4$ razy (odcinek AB rys. 12). Następnie powietrze sprężono adiabatycznie (odcinek BC), po czym izobarycznie doprowadzono do stanu pierwotnego (odcinek CA).



Rys. 12

Obliczyć pracę wykonaną w tym cyklu. Masa cząsteczkowa powietrza $\mu = 29$ kg/kmol, $\kappa = 1,4$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

Praca w omawianym cyklu

$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}, \quad (1)$$

gdzie praca izotermicznego rozprężania się powietrza od ciśnienia p_1 do p_2

$$L_{AB} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$



Praca adiabatycznego sprężania od ciśnienia p_2 do p_1

$$L_{BC} = \frac{1}{\kappa - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_3) = \frac{p_2 V_2}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right]. \quad (3)$$

Praca wykonana podczas izobarycznej zmiany objętości powietrza od V_3 do V_1

$$L_{CA} = \int_{V_3}^{V_1} p dV = p_1 (V_1 - V_3) \quad (4)$$

Uwzględniając (2), (3) i (4) w (1) otrzymuje się

$$L = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2 V_2}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right] + p_1 (V_1 - V_3). \quad (5)$$

Dla izotermy AB można napisać

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT, \quad (6)$$

Dla adiabaty BC, na podstawie równania Poissona, dostajemy

$$p_2 V_2^\kappa = p_1 V_3^\kappa.$$

skąd, z uwagi na (6)

$$V_3 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot V_2 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \frac{m}{\mu} RT \cdot \frac{n}{p_1}. \quad (7)$$

Podstawiając (6) i (7) do (5) otrzymuje się

$$L = \frac{m}{\mu} RT \left\{ \ln \frac{p_1}{p_2} + \frac{1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right] + 1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot n \right\}. \quad (8)$$

Podstawiając do (8) dane numeryczne otrzymuje się



$$L = \frac{1 \text{ kg}}{28 \text{ kg/kmol}} \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 500 \text{ K} \cdot \left\{ \ln 4 + \right. \\ \left. + 2,5 \left[1 - (4)^{0,285} \right] + 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{0,714} \cdot 4 \right\} = - 45 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Zadanie 71

W warunkach normalnych ($T_0 = 273,15 \text{ K}$, $p_0 = 101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$) gaz posiada objętość właściwą $v = 0,348 \text{ m}^3/\text{kg}$.

Obliczyć ciepła właściwe przy stałym ciśnieniu c_p i stałej objętości c_v , jeżeli wykładnik adiabaty dla tego gazu $\kappa = 1,27$. Co to za gaz?

$$\text{Uniwersalna stała gazowa } R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}.$$

Rozwiązanie

Z równania Mendelejewa-Clapeyrona,

$$p_0 V = \frac{m}{\mu} R T_0,$$

wynika, że objętość właściwa rozważanego gazu

$$v = \frac{V}{m} = \frac{R T_0}{\mu p_0},$$

zaś masa cząsteczkowa

$$\mu = \frac{R T_0}{p_0 v}. \quad (1)$$

Ponieważ wykładnik adiabaty

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{z + 2}{z},$$

zatem liczba stopni swobody

$$z = \frac{2}{\kappa - 1}. \quad (2)$$

Z uwagi na (1) i (2) ciepła właściwe c_v i c_p rozważanego gazu będą równe:

$$c_v = \frac{z}{2} \frac{R}{\mu} = \frac{p_0 v}{(\kappa - 1) T_0} \quad (3)$$



$$c_p = \kappa c_v = \frac{\kappa p_0 v}{(\kappa - 1) T_0} \quad (4)$$

Podstawiając do (1), (2), (3) i (4) dane numeryczne otrzymuje się

$$\mu = \frac{8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 273,15 \text{ K}}{101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0,348 \text{ m}^3/\text{kg}} = 64,06 \text{ kg/kmol},$$

$$z = \frac{2}{0,27} = 7,4,$$

$$c_v = \frac{101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0,348 \text{ m}^3/\text{kg}}{0,27 \cdot 273,15 \text{ K}} = 481 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}},$$

$$c_p = 1,27 \cdot 481 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 611 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

Powyższe wartości numeryczne dla μ , z , c_v i c_p wskazują, że rozważanym gazem jest dwutlenek siarki (SO_2).

Zadanie 72

Masę $m = 2,5 \text{ kg}$ dwutlenku węgla o temperaturze $T = 290 \text{ K}$ i ciśnieniu $p = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ sprężono adiabatycznie do pewnego ciśnienia p_1 (rys. 13). Po sprężeniu gaz rozprężył się izotermicznie.

Określić parametry gazu po rozprężeniu, jeżeli przyrost energii wewnętrznej w procesie adiabatycznym $\Delta U = 108 \text{ kJ}$ jest równy ilości ciepła pobranej w procesie izotermicznym.

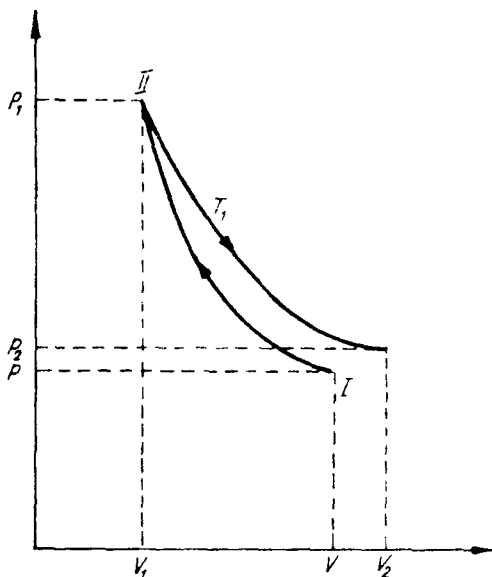
Masa cząsteczkowa CO_2 $\mu = 44,01 \text{ kg/kmol}$, wykładnik adiabaty $\kappa = 1,30$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki oraz równania Poissona otrzymuje się



$$\begin{aligned}\Delta U &= - \int_V^{V_1} p dV = - \int_V^{V_1} C \frac{dV}{V^\kappa} = \\ &= \frac{1}{\kappa - 1} (p_1 V_1 - pV).\end{aligned}\quad (1)$$



Rys. 13

Z równania Mendelejewa-Clapeyrona dla stanu I i II gazu wynika, że

$$\begin{aligned}pV &= \frac{m}{\mu} RT, \\ p_1 V_1 &= \frac{m}{\mu} RT_1.\end{aligned}\quad (2)$$

Uwzględniając (2) w (1) otrzymuje się:

$$\Delta U = \frac{m}{(\kappa - 1)\mu} RT \left(\frac{T_1}{T} - 1 \right),$$



skąd

$$T_1 = T \left[\frac{\Delta U \mu (\kappa - 1)}{mRT} + 1 \right] \quad (3)$$

Ponieważ

$$\frac{T_1}{T} = \left(\frac{V}{V_1} \right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_1}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (4)$$

wobec tego łącząc (3) i (4) otrzymuje się

$$V_1 = \frac{V}{\left[\frac{\Delta U \mu (\kappa - 1)}{mRT} + 1 \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}} = \frac{mRT}{\mu p \left[\frac{\Delta U \mu (\kappa - 1)}{mRT} + 1 \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}}, \quad (5)$$

$$p_1 = p \left[\frac{\Delta U \mu (\kappa - 1)}{mRT} + 1 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (6)$$

Z warunków zadania wynika, że $\Delta U = \Delta Q = L_{\text{izot}}$, zatem

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2},$$

skąd, z uwagi na (5) i (6), dostaje się

$$V_2 = V_1 \exp \left(\frac{\Delta U \mu}{mRT} \right) = \frac{mRT \exp \left(\frac{\Delta U \mu}{mRT} \right)}{\mu p \left[\frac{\Delta U \mu (\kappa - 1)}{mRT} + 1 \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}}, \quad (7)$$

$$p_2 = \frac{p \left[\frac{\Delta U \mu (\kappa - 1)}{mRT} + 1 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\exp \left(\frac{\mu \Delta U}{mRT} \right)}. \quad (8)$$

Podstawiając do (3), (5), (6), (7) i (8) dane numeryczne otrzymuje się



$$T_1 = 290 \text{ K} \left(\frac{1,08 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot 44,01 \text{ kg/kmol}}{2,5 \text{ kg} \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}} + 1 \right) = 326 \text{ K},$$

$$x = \frac{mRT}{\mu(x-1)} = \frac{2,5 \text{ kg} \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 290 \cdot \text{K}}{44,01 \text{ kg/kmol} \cdot 0,3} = 8,8 \cdot 10^5 \text{ J},$$

$$V_1 = \frac{2,5 \text{ kg} \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 290 \text{ K}}{44,01 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \cdot 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left(\frac{1,08 \cdot 10^5 \text{ J}}{8,8 \cdot 10^5 \text{ J}} + 1 \right)^{3,33}} = 0,862 \text{ m}^3,$$

$$p_1 = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left(\frac{1,08 \cdot 10^5 \text{ J}}{8,8 \cdot 10^5 \text{ J}} + 1 \right)^{4,33} = 3,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$V_2 = 0,862 \text{ m}^3 \exp \left(\frac{1,08 \cdot 10^5 \text{ J}}{8,8 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot 0,3} \right) \approx 1,29 \text{ m}^3,$$

$$p_2 = \frac{2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \left(\frac{1,08 \cdot 10^5 \text{ J}}{8,8 \cdot 10^5 \text{ J}} + 1 \right)^{4,33}}{\exp \left(\frac{1,08 \text{ J}}{8,8 \text{ J} \cdot 0,3} \right)} = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Zadanie 73

Ciepło właściwe pewnego gazu w stałej objętości jest równe c_v , a wykładnik adiabaty - κ

Znaleźć ciepło właściwe procesu politropowego dla tego gazu, jeżeli wykładnik politropy wynosi n .

Rozwiązanie

Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki

$$\Delta Q = \Delta U + L,$$

(1)



gdzie ΔQ - ilość ciepła pobranego przez gaz w procesie politropowym,

$$\Delta Q = mc_n (T_2 - T_1), \quad (2)$$

ΔU - zmiana energii wewnętrznej gazu,

$$\Delta U = mc_v (T_2 - T_1), \quad (3)$$

L - praca wykonana przez gaz,

$$L = \frac{m}{\mu} \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2). \quad (4)$$

Uwzględniając (2), (3) i (4) w (1) otrzymuje się:

$$c_n = c_v + \frac{R}{\mu(1-n)}. \quad (5)$$

Ponieważ

$$c_p - c_v = \frac{R}{\mu} \text{ oraz } \frac{c_p}{c_v} = \kappa$$

zatem (5) przyjmuje postać:

$$c_n = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1}.$$

Zadanie 74

W procesie politropowym masa $m = 8$ kg azotu ogrzała się od temperatury $T_1 = 300$ K do $T_2 = 600$ K.

Wiedząc, że pobrana ilość ciepła $Q = 420$ J, obliczyć wkładnik politropy n . Ciepło właściwe azotu przy stałym ciśnieniu $c_p = \text{const} = 1040$ J/kg K. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$ Masa cząsteczkowa azotu $\mu = 28 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$.

Rozwiązanie

Zgodnie z wynikiem poprzedniego zadania, ciepło właściwe gazu w procesie politropowym

$$c_n = c_v \frac{n - \kappa}{n - 1}.$$



Ponieważ $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$, zatem wykładnik politropy

$$n = \frac{c_p - c_n}{c_v - c_n} \quad (1)$$

Ale

$$c_n = \frac{Q}{m (T_2 - T_1)} \quad (2)$$

oraz

$$c_v = c_p - \frac{R}{\mu} \quad (3)$$

Uwzględniając (2) i (3) w (1) otrzymuje się

$$n = \frac{c_p - \frac{Q}{m (T_2 - T_1)}}{c_p - \frac{R}{\mu} - \frac{Q}{m (T_2 - T_1)}} \quad (4)$$

Podstawiając dane numeryczne do równania (4) dostaje się

$$n = \frac{1040 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} - \frac{420 \cdot \text{J}}{8 \text{ kg} \cdot 300 \cdot \text{K}}}{1040 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} - \frac{8,314 \cdot 10^3}{28} \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} - \frac{420 \text{ J}}{2400 \text{ kg} \cdot \text{K}}} = 1,39$$

Zadanie 75

Wodór o masie $m = 0,8 \text{ kg}$ wykonuje cykl Carnota, w którym ciśnienie maksymalne $p_1 = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, minimalne $p_3 = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Minimalna objętość $V_1 = 2 \text{ m}^3$, maksymalna - $V_3 = 12 \text{ m}^3$.

Określić parametry stanu gazu w punktach przecięcia się izoterm i adiabat. Liczba stopni swobody dla cząsteczki wodoru $z = 5$, masa jednego kilomola wodoru $\mu = 2 \text{ kg/kmol}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \text{ J /kmol K}$.



Rozwiązanie

Ponieważ dane są: p_1 , V_1 , p_3 , V_3 (rys. 14), zatem z równania Mendelejewa-Clapeyrona dla stanów I i III otrzymuje się

$$T_1 = \frac{\mu p_1 V_1}{mR}, \quad (1)$$

$$T_2 = \frac{\mu p_3 V_3}{mR}. \quad (2)$$

Z prawa Boyle'a-Mariotte'a oraz Poissona wynika, że:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad (3)$$

zaś

$$p_2 V_2^{\kappa} = p_3 V_3^{\kappa}, \quad (4)$$

gdzie $\kappa = \frac{\gamma + 2}{\gamma}$.

Z (3) i (4) dostaje się

$$V_2 = \left(\frac{p_3 V_3^{\kappa}}{p_1 V_1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}. \quad (5)$$

Natomiast z (3) i (5) wynika, że

$$p_2 = \frac{(p_1 V_1)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{(p_3 V_3^{\kappa})^{\frac{1}{\kappa-1}}}. \quad (6)$$

Równanie Poissona oraz Boyle'a-Mariotte'a zapisane dla stanów I, III i IV daje:

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_4 V_4^{\kappa}, \quad (7)$$

$$p_4 V_4 = p_3 V_3, \quad (8)$$

skąd

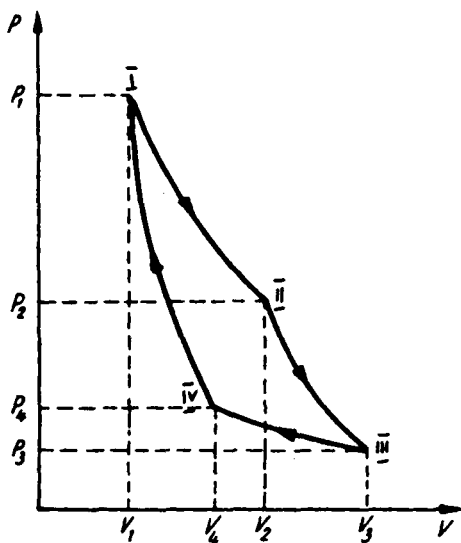
$$V_4 = \left(\frac{p_1 V_1^{\kappa}}{p_3 V_3} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad (9)$$



$$p_4 = \frac{(p_3 V_3)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{(p_1 V_1)^{\frac{1}{\kappa-1}}} \quad (10)$$

Podstawiając do (1), (2), (5), (6), (9) i (10) wartości numeryczne otrzymuje się:

$$\begin{aligned} T_1 &= 601,5 \text{ K}; & T_2 &= 361 \text{ K}, \\ V_2 &= 3,3 \text{ m}^3; & p_2 &= 6,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\ V_4 &= 7,2 \text{ m}^3; & p_4 &= 1,7 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \end{aligned}$$



Rys. 14

Zadanie 76

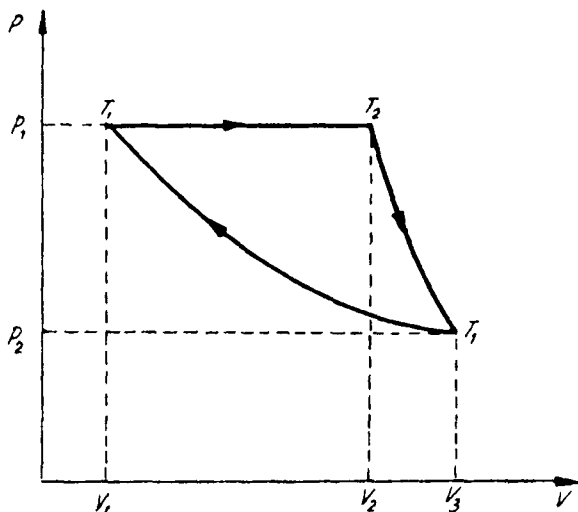
W idealnej maszynie cieplnej, w której ciałem roboczym jest jedna gramocząsteczka gazu doskonałego, zachodzą



trzy po sobie następujące procesy odwracalne (rys. 15):

- 1) gaz o początkowej objętości V_1 ogrzewa się izobarycznie od temperatury T_1 do temperatury T_2 ,
- 2) gaz zwiększa swoją objętość adiabaticznie do chwili, gdy jego temperatura obniży się do temperatury początkowej T_1 ,
- 3) gaz jest sprężany izotermicznie do objętości początkowej V_1 .

Obliczyć sprawność tej maszyny.



Rys. 15

Rozwiązanie

Sprawność maszyny

$$\eta = \frac{L}{Q}, \quad (1)$$

gdzie L - całkowita praca wykonana przez maszynę,

Q - ilość ciepła, które maszyna pobrała ze źródła ciepła.



1) Podczas rozprężania izobarcznego gaz zwiększa swoją objętość od V_1 do $V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$ i wykonuje pracę

$$L_1 = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

Ponieważ

$$p dV = R dT,$$

zatem

$$L_1 = R(T_2 - T_1). \quad (2)$$

Energia wewnętrzna gazu w tym procesie zmieni się o

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} dU = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT = C_V(T_2 - T_1), \quad (3)$$

gdzie C_V jest ciepłem molowym gazu przy stałej objętości.

Zgodnie z I zasadą termodynamiki, ilość ciepła, które pobrał gaz w tym procesie

$$\begin{aligned} Q = Q_1 = L_1 + \Delta U &= R(T_2 - T_1) + C_V(T_2 - T_1) = \\ &= C_p(T_2 - T_1), \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie C_p jest ciepłem molowym gazu przy stałym ciśnieniu.

2) Podczas rozprężania adiabatycznego gaz zwiększa swoją objętość od V_2 do V_3 , a jego temperatura obniża się od T_2 do T_1 , przy czym

$$T_1 V_3^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1} = T_2 \left(V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} \right)^{\kappa-1},$$

skąd

$$V_3 = V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (5)$$

Praca, jaką wykonał gaz podczas rozprężania adiabatycznego, równa się ubytkowi jego energii wewnętrznej



$$L_2 = \int_{V_2}^{V_3} p dV = - \int_{T_2}^{T_1} dU = - \int_{T_2}^{T_1} C_V dT = C_V (T_2 - T_1). \quad (6)$$

W tym procesie gaz nie pobrał ani nie oddał ciepła, a zatem

$$Q_2 = 0. \quad (7)$$

3) Po sprężeniu izotermicznym gaz powraca do stanu początkowego o objętości V_1 , temperaturze T_1 i ciśnieniu $p_1 = \frac{RT_1}{V_1}$. Praca wykonana przez gaz w tym procesie wynosi:

$$L_3 = \int_{V_3}^{V_1} p dV = \int_{V_3}^{V_1} RT_1 \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_1}{V_3}$$

lub, z uwagi na (5),

$$L_3 = - RT_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (8)$$

W procesie tym gaz oddaje ilość ciepła

$$Q_3 = -L_3.$$

Łącząc wyrażenia: (2), (6) i (8) otrzymuje się całkowitą pracę wykonaną przez gaz podczas wymienionych w zadaniu przemian:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = (R + C_V)(T_2 - T_1) - RT_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (9)$$

Uwzględniając w (1) wyrażenie (4) i (9) otrzymuje się

$$\eta = \frac{C_p(T_2 - T_1) - RT_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{C_p(T_2 - T_1)}.$$

Ponieważ

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} = \frac{C_p}{R},$$

zatem

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$



Zadanie 77

Obliczyć pracę, jaką wykona urządzenie chłodnicze, działające na zasadzie cyklu Carnota, zamrażając wodę o masie $m = 1 \text{ kg}$ o temperaturze 293 K na lód o temperaturze $T_0 = 273 \text{ K}$. Temperatura otoczenia $T_1 = 293 \text{ K}$. Ciepło właściwe wody $c = 4,19 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$, ciepło właściwe topnienia lodu $l_t = 334 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

Rozwiązanie

Sprawność cyklu Carnota

$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{T_1 - T_0}{T_1},$$

gdzie L - praca wykonana przez ciało czynne w cyklu,

Q_1 - ilość ciepła pobrana przez ciało czynne wykonujące pracę,

T_1 i T_0 - temperatury źródła ciepła i chłodnicy.

Gdy cykl Carnota przebiega w kierunku odwrotnym, układ pracuje jako lodówka, tzn. pobiera z chłodnicy ilość ciepła Q_2 oraz z zewnątrz pracę L' , a oddaje grzejnicy ilość ciepła $Q'_2 = Q_2 + L'$. Wtedy sprawność

$$\eta = \frac{L'}{Q_2 + L'},$$

skąd

$$L' = Q_2 \frac{\eta}{1 - \eta} = Q_2 \cdot \frac{(T_1 - T_0)}{T_0} \quad (1)$$

W rozważanym przypadku temperatura wody chłodzonej (chłodnicy) stale się obniża, przy czym dla odprowadzenia ilości ciepła σQ z chłodnicy o temperaturze T należy, zgodnie ze wzorem (1), wykonać pracę

$$\sigma L'_1 = \sigma Q \frac{(T_1 - T)}{T} \quad (2)$$



Wskutek pobrania od wody chłodzonej ciepła dQ , jej temperatura obniży się od T do $T - dT$, przy czym woda oddaje ilość ciepła $dQ = - mc dT$. W celu ochłodzenia wody od temperatury T_1 do T_0 należy wykonać pracę:

$$\begin{aligned} L'_1 &= \int \frac{T_1 - T}{T} dQ = - \int_{T_1}^{T_0} \frac{(T_1 - T)}{T} mc dT = \\ &= mc \left[T_1 \ln \frac{T_1}{T_0} - (T_1 - T_0) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Przy przejściu wody o temperaturze T_0 w lód o tej samej temperaturze wydzieliła się ilość ciepła $Q_2 = mL_t$. Na przeniesienie tej ilości ciepła do źródła ciepła, przy stałej temperaturze T_0 , potrzebna jest praca

$$L'_2 = Q_2 \frac{(T_1 - T_0)}{T_0} = m L_t \frac{(T_1 - T_0)}{T_0}. \quad (4)$$

Wobec tego, całkowita praca wykonana przez urządzenie chłodnicze wynosi:

$$L' = L'_1 + L'_2 = m \left[cT_1 \ln \frac{T_1}{T_0} - c(T_1 - T_0) + L_t \frac{(T_1 - T_0)}{T_0} \right]. \quad (5)$$

Podstawiając do (5) dane numeryczne, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} L' &= 1 \text{ kg} \left[4,19 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \ln \frac{293 \text{ K}}{273 \text{ K}} \cdot 293 \text{ K} + \right. \\ &\quad \left. - 4,19 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} 20 \text{ K} + 334 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot \frac{20 \text{ K}}{273 \text{ K}} \right] = 27320 \text{ J}. \end{aligned}$$

Zadanie 78

Wykazać, że całkowita zmiana entropii gazu doskonałego w cyklu kołowym Carnota równa się zeru. Entropia w stanie początkowym gazu wynosi S_0 .

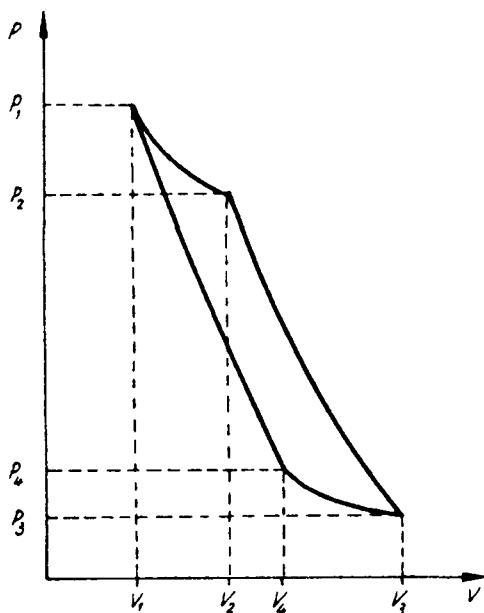


Rozwiązanie

Niech po zakończeniu cyklu entropia gazu wynosi S , wówczas zmiana entropii w czasie cyklu $S - S_0$ równa się sumie zmian entropii w poszczególnych procesach cyklu, czyli

$$S - S_0 = S_1 - S_0 + S_2 - S_1 + S_3 - S_2 + S - S_3. \quad (1)$$

Dla rozprężania izotermicznego (rys. 16)



Rys. 16

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{pdV}{T} = \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \\ &= \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Dla rozprężania adiabatycznego



$$S_2 - S_1 = \int \frac{d\eta}{T} = 0, \quad (3)$$

gdyż $d\eta = 0$.

Dla sprężania izotermicznego

$$S_3 - S_2 = \frac{m}{\mu} R \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} = -\frac{m}{\mu} R \cdot \ln \frac{V_3}{V_4},$$

a ponieważ

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1},$$

zatem

$$S_3 - S_2 = -\frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (4)$$

Dla sprężania adiabatycznego

$$S - S_3 = 0, \quad (5)$$

bowiem $dQ = 0$.

Uwzględniając (2), (3), (4) i (5) w (1) otrzymuje się

$$S - S_0 = \frac{m}{\mu} R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = 0,$$

czyli $S = S_0$.

Zadanie 79

W stalowej butli o pojemności $V_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ znajduje się gaz pod ciśnieniem $p_1 = 45,6 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, a w drugiej butli stalowej o pojemności $V_2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ znajduje się inny gaz (nie reagujący chemicznie z gazem w pierwszej butli) pod ciśnieniem $p_2 = 86,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Temperatury obu gazów są jednakowe i wynoszą $T = 293 \text{ K}$.

Obliczyć jak zmieni się entropia tego układu po połączeniu obu butli.



Rozwiązanie

Zmianę entropii pewnej ilości gazu doskonałego przy przejściu ze stanu początkowego do końcowego oblicza się z wzoru

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{\frac{m}{\mu} c_v dT + p dV}{T} = \\ &= m c_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \\ &= m c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Entropia obu gazów przed zmieszaniem

$$S_1 = S'_1 + S'_2,$$

gdzie S'_1 i S'_2 oznaczają entropie poszczególnych gazów.

Jeżeli po zmieszaniu układ ma entropię S_2 , to całkowita zmiana entropii będzie równa

$$\Delta S = S_2 - S_1 = S_2 - S'_1 - S'_2.$$

Wszystkie entropie należy obliczyć względem tego samego stanu podstawowego, w którym gaz był określony wielkościami stanu p_0 , V_0 , T_0 .

Na podstawie wzoru (1) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= m c_v \ln \frac{T}{T_0} + \frac{m}{\mu} R \cdot \ln \frac{V}{V_0} + \\ &- m_1 c_{v1} \ln \frac{T}{T_0} - \frac{m_1}{\mu_1} R \ln \frac{V_1}{V_0} - m_2 c_{v2} \ln \frac{T}{T_0} + \\ &- \frac{m_2}{\mu_2} R \ln \frac{V_2}{V_0} \end{aligned} \quad (2)$$

Ponieważ pojemność cieplna mieszaniny gazów równa się sumie pojemności cieplnych gazów tworzących mieszaninę.

$$m c_v = m_1 c_{v1} + m_2 c_{v2} \quad (3)$$



oraz całkowita ilość gramocząsteczek mieszaniny spełnia zależność

$$\frac{m}{\mu} = \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}, \quad (4)$$

to z wzoru (2), po podstawieniu (3) i (4) otrzymuje się

$$S_2 - S_1 = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) R \ln V - \frac{m_1}{\mu_1} R \ln V_1 + \\ - \frac{m_2}{\mu_2} R \ln V_2.$$

Ale, z równania stanu gazów

$$\frac{m_1}{\mu_1} R = \frac{p_1 V_1}{T}$$

oraz

$$\frac{m_2}{\mu_2} R = \frac{p_2 V_2}{T},$$

a więc

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T} \left[(p_1 V_1 + p_2 V_2) \ln V - p_1 V_1 \ln V_1 + \right. \\ \left. - p_2 V_2 \ln V_2 \right], \quad (5)$$

gdzie $V = V_1 + V_2$.

Równanie (5) po przekształceniach przyjmuje ostatecznie postać

$$S_2 - S_1 = \frac{p_1 V_1}{T} \ln \left(1 + \frac{V_2}{V_1} \right) + \frac{p_2 V_2}{T} \ln \left(1 + \frac{V_1}{V_2} \right). \quad (5)$$

Podstawiając do (6) dane numeryczne otrzymuje się

$$\Delta S = \frac{45,6 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{293 \text{ K}} \ln \left(1 + \frac{3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3} \right) +$$



$$+ \frac{86,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{293 \text{ K}} \ln \left(1 + \frac{5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3}}{3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3}} \right) =$$

$$= 1225,7 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Zadanie 80

Pewną ilość gazu doskonałego o objętości $V_1 = 10^{-2} \text{ m}^3$ i ciśnieniu $p_1 = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ sprężono izotermicznie do ciśnienia $p_2 = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Obliczyć zmianę energii swobodnej gazu w tym procesie.

Rozwiązanie

Elementarną zmianę energii swobodnej gazu można obliczyć różniczkując wzór definiujący energię swobodną,

$$F = U - TS.$$

W takim razie

$$dF = dU - T dS - S dT.$$

W procesach odwracalnych, elementarna zmiana entropii $dS = \frac{\delta Q}{T}$. Dla procesu izotermicznego $dT = 0$, $dU = 0$ oraz, na podstawie I zasady termodynamiki, $\delta Q = \delta L$, zatem

$$dF = - \delta Q = - \delta L. \quad (1)$$

Całkowitą zmianę energii swobodnej można znaleźć całkując wyrażenie (1).

$$\int_1^2 dF = - \int_1^2 \delta L = - \int_1^2 p dV.$$

Ale $pV = \frac{m}{\mu} RT$, skąd $p = \frac{m}{\mu} R \frac{T}{V}$, zatem

$$\int_1^2 dF = - \int_1^2 \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = - \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}.$$

czyli

$$F_2 - F_1 = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

(2)



Ponieważ

$$\frac{m}{\mu} RT = p_1 V_1$$

oraz dla przemiany izotermicznej

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1},$$

więc

$$F_2 - F_1 = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (3)$$

Podstawiając do (3) dane numeryczne otrzymuje się

$$F_2 - F_1 = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \ln 2 = 3,46 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Zadanie 81

Tlen o masie $m = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ i temperaturze $T_0 = 300 \text{ K}$ sprężono przy stałym ciśnieniu do objętości $V_1 = \frac{3}{4} \cdot V_0$, gdzie V_0 jest objętością tlenu w temperaturze T_0 . Obliczyć zmianę potencjału termodynamicznego gazu w tym procesie.

Ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu dla tlenu $c_p = 0,91 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

Rozwiązanie

Potencjał termodynamiczny

$$G = U - TS + pV.$$

Różniczkując powyższe wyrażenie otrzymuje się

$$dG = dU + p dV + V dp - T dS - S dT. \quad (1)$$

Biorąc pod uwagę, że w procesach odwracalnych $dS = \frac{\delta Q}{T}$ oraz, że zgodnie z I zasadą termodynamiki $dU + p dV = \delta Q$, równanie (1) można zapisać

$$dG = V dp - S dT.$$



Ale w przemianie izobarycznej $dp = 0$, zatem

$$dG = - S dT. \quad (2)$$

Entropia stanu gazu o temperaturze T względem stanu, w którym gaz miał temperaturę T_0 wynosi

$$S = \int_{T_0}^T \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_0}^T \frac{\frac{m}{\mu} C_v dT + p dV}{T}, \quad (3)$$

przy czym, zgodnie z równaniem Mendelejewa-Clapeyrona oraz Mayera,

$$p dV = \frac{m}{\mu} R dT, \quad C_p = C_v + R. \quad (4)$$

Uwzględniając (4) w (3) otrzymuje się

$$S = \int_{T_0}^T \frac{m}{\mu} C_p \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{T}{T_0} = m c_p \ln \frac{T}{T_0}. \quad (5)$$

Podstawiając (5) do (2) i całkując, otrzymuje się całkowitą zmianę potencjału termodynamicznego

$$\int_1^2 dG = - \int_{T_0}^{T_1} S dT = - \int_{T_0}^{T_1} m c_p \ln \frac{T}{T_0} dT,$$

czyli

$$G_2 - G_1 = m c_p (T_1 - T_0) + m c_p T_1 \ln \frac{T_0}{T_1}. \quad (6)$$

Temperaturę T_1 gazu po przemianie izobarycznej można wyznaczyć z równania stanu

$$\frac{pV_0}{T_0} = \frac{pV_1}{T_1},$$

gdzie zgodnie z warunkami zadania $V_1 = \frac{3}{4} V_0$. Wówczas $T_1 = \frac{3}{4} T_0$, a zmiana potencjału termodynamicznego (wzór (6))

$$G_2 - G_1 = \frac{1}{4} m c_p T_0 (3 \ln 1,33 - 1). \quad (7)$$

Podstawiając do (7) dane numeryczne otrzymuje się

$$G_2 - G_1 = \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 0,91 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 300 \text{ K} (3 \ln 1,33 - 1) = - 57,1 \text{ J}.$$



Zadanie 82

Podczas topnienia $n = 1$ kilomola lodu zmiana entropii $\Delta S = 22,2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

Obliczyć o ile zmieni się temperatura topnienia lodu przy wzroście ciśnienia zewnętrznego o $\Delta p = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Masa jednego kilomola lodu $\mu = 18 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$, gęstość wody ρ_2 , gęstość lodu $\rho_1 = 0,9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Rozwiązanie

Z równania Clausiusa-Clapeyrona wynika, że

$$\Delta T = \frac{\Delta p T (v_2 - v_1)}{L_t}, \quad (1)$$

gdzie v_2 - objętość właściwa wody,

v_1 - objętość właściwa lodu.

Mnożąc i dzieląc (1) przez masę cząsteczkową wody μ , otrzymuje się

$$\Delta T = \frac{\Delta p \mu (v_2 - v_1)}{\mu L_t}. \quad (2)$$

Z drugiej strony zmiana entropii

$$\Delta S = \frac{m L_t}{T} = \frac{\frac{m}{\mu} \mu L_t}{T} = \frac{n \mu L_t}{T},$$

skąd ciepło molowe topnienia

$$\mu L_t = \frac{\Delta S T}{n}, \quad (3)$$

gdzie n - liczba kilomoli.

Uwzględniając (3) w (2) dostaje się

$$\Delta T = \frac{\Delta p \mu (v_2 - v_1) n}{\Delta S}.$$

Ale

$$v_1 = \frac{V_1}{m} = \frac{1}{\rho_1}, \quad v_2 = \frac{V_2}{m} = \frac{1}{\rho_2},$$



zatem

$$\Delta T = \frac{\Delta p \mu \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) n}{\Delta S} \quad (4)$$

Podstawiając dane numeryczne do (4) otrzymuje się:

$$\Delta T = \frac{10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 18 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} \left(\frac{1 \text{ m}^3}{10^3 \text{ kg}} - \frac{1 \text{ m}^3}{0,9 \cdot 10^3 \text{ kg}} \right) 1 \text{ kmol}}{22,2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}} = -0,009 \text{ K}.$$

Zadanie 83

Pod ciśnieniem $p = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ cyna topi się w temperaturze $T = 504,65 \text{ K}$. Ciepło właściwe topnienia w tej temperaturze $L_t = 60,7 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$. Wiedząc, że przy podwyższeniu ciśnienia zewnętrznego do $p_1 = 49 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ temperatura topnienia cyny rośnie do $T_1 = 505,55 \text{ K}$, obliczyć o ile procent zwiększy się objętość właściwa cyny podczas topnienia. Gęstość cyny $\rho = 7,28 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Rozwiązanie

Z równania Clausiusa-Clapeyrona

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{(v_2 - v_1) T}{L_t} \quad (1)$$

Objętość właściwa fazy stałej $v_1 = \frac{1}{\rho}$, gdzie ρ jest gęstością cyny. Objętość właściwa fazy ciekłej

$$v_2 = v_1 + \Delta v = v_1 + v_1 \frac{x}{100} \% \quad (2)$$

Uwzględniając warunki zadania oraz podstawiając (2) do (1) otrzymuje się

$$\frac{T_1 - T}{p_1 - p} = \frac{x \% T}{100 \rho L_t},$$

skąd

$$x \% = \frac{100 (T_1 - T) \rho L_t}{T (p_1 - p_2)} \quad (3)$$

Podstawiając do (3) dane numeryczne otrzymuje się



$$x\% = \frac{100 (505,55 \text{ K} - 504,65 \text{ K}) 7,28 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 60,7 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}{504,65 \text{ K} (490 - 1) \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} =$$

$$= 1,61 \%$$

Zadanie 84

Obliczyć temperaturę i ciśnienie punktu potrójnego arsenu, jeżeli zależność ciśnienia pary nasyconej od temperatury określona jest równaniami $\frac{a_1}{T}$.

a) dla fazy ciekłej $p_1 = k_1 e^{\frac{a_1}{T}}$

b) dla fazy stałej $p_2 = k_2 e^{\frac{a_2}{T}}$,

gdzie $a_1 = -5658 \text{ K}$,

$a_2 = -15978 \text{ K}$,

$k_1 = 511,9 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$,

$k_2 = 841,2 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Rozwiązanie

W punkcie potrójnym o określonym ciśnieniu i temperaturze istnieją obok siebie w równowadze wszystkie trzy stany skupienia danej substancji. W punkcie tym prężność pary nasyconej nad cieczą i nad fazą stałą musi być jednakowa, czyli

$$p_1 = p_2 = p$$

lub, z uwagi na warunki zadania, $k_1 e^{\frac{a_1}{T}} = k_2 e^{\frac{a_2}{T}}$,

skąd $\frac{a_1 - a_2}{T} = \ln \frac{k_2}{k_1}$, a zatem $T = \frac{a_1 - a_2}{2,3 \lg \frac{k_2}{k_1}}$.



Uwzględniając (1) w równaniu dla p_1 otrzymuje się:

$$p_1 = p = k_1 \exp \left(\frac{2,3 a_1 \lg \frac{k_2}{k_1}}{a_1 - a_2} \right). \quad (2)$$

Podstawiając do (1) i (2) dane numeryczne otrzymuje się

$$T = \frac{-5658 \text{ K} + 15978 \text{ K}}{2,3 \lg \frac{841,2 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}}{511,9 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-2}}} = 1091 \text{ K},$$

$$p = 511,9 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \exp \left(-\frac{5658}{1091} \right) = 359,97 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Zadanie 85

Wiedząc, że w temperaturze T_0 ciśnienie nasyconej pary wodnej wynosi p_0 oraz, że ciepło właściwe parowania wody zmienia się wraz z temperaturą według przybliżonej zależności: $L_p = a - bT$, gdzie a i b są stałymi niezależnymi od temperatury, znaleźć ciśnienie p nasyconej pary wodnej w temperaturze T . Masa cząsteczkowa pary wodnej jest równa μ , uniwersalna stała gazowa - R . Założyć, że do fazy gazowej można zastosować równanie stanu i pominąć objętość właściwą fazy skroplonej.

Rozwiązanie

Z równania Clausiusa-Clapeyrona

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L_p}{(v_2 - v_1) T},$$

zatem po wykorzystaniu zależności $L_p = a - bT$ i uwzględnieniu, że $v_1 \ll v_2$, otrzymuje się

$$\frac{dp}{dT} = \frac{a - bT}{v_2 T}. \quad (1)$$



Z równania Mendelejewa-Clapeyrona, $pV = \frac{m}{\mu} RT$, wynika, że

$$v_2 = \frac{V}{m} = \frac{RT}{\mu p}. \quad (2)$$

Łącząc (1) i (2) dostaje się

$$\frac{dp}{p} = \frac{\mu}{R} \frac{a - bT}{T^2} dT. \quad (3)$$

Całkując obie strony równania (3) otrzymuje się

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{\mu}{R} \int_{T_0}^T \frac{a - bT}{T^2} dT,$$

czyli

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\mu}{R} \left[a \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + b \ln \frac{T}{T_0} \right],$$

skąd

$$p = p_0 \exp \left\{ -\frac{\mu}{R} \left[a \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + b \ln \frac{T}{T_0} \right] \right\}.$$

2.3.3. Zadania

Zadanie 86

Gaz doskonały o objętości $V = 2 \text{ m}^3$ i ciśnieniu $p = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ rozprężył się izotermicznie do objętości $V_1 = 12 \text{ m}^3$. Ile wyniesie różnica ciśnień końcowych Δp jeśli gaz będzie rozprężał się nie izotermicznie ale adiabatycznie od tych samych warunków początkowych do objętości końcowej V_1 . Wykładnik adiabaty $\kappa = 1,4$.

Rozwiązanie

$$\Delta p = p \frac{V}{V_1} \left[1 - \left(\frac{V}{V_1} \right)^{\kappa-1} \right] = 0,85 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$



Zadanie 87

Podczas izotermicznego rozprężania masy $m = 2$ kg wodoru o objętości $V = 8,31 \text{ m}^3$ i ciśnieniu $p = 6 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ została wykonana praca $L = 5,47 \cdot 10^6 \text{ J}$. Określić końcowe parametry gazu p_2 , V_2 i T_2 , jeżeli po izotermicznym rozprężeniu wodoru sprężono adiabatycznie, a wykonana praca sprężania była równa co do wartości bezwzględnej pracy rozprężania izotermicznego. Masa cząsteczkowa wodoru $\mu = 2,016 \text{ kg/kmol}$. Wykładnik adiabaty $\kappa = 1,41$.

Rozwiązanie

$$T_1 = \frac{pV\mu}{Rm} \left[1 - \frac{\kappa(\kappa-1)}{pV} \right] = 862 \text{ K},$$

$$A = -L,$$

$$V_2 = \frac{V \exp(L/pV)}{\left[1 - \frac{\kappa(\kappa-1)}{pV} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = 10,1 \text{ m}^3,$$

$$p_2 = \frac{p \left[1 - \frac{\kappa(\kappa-1)}{pV} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\exp(L/pV)} = 7,11 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Zadanie 88

Siarczek wodoru o masie $m = 6$ kg, objętości $V = 3 \text{ m}^3$ i temperaturze $T = 300 \text{ K}$ sprężono adiabatycznie tak, że ciśnienie gazu powiększyło się $n = 2$ razy.

Obliczyć temperaturę i objętość końcową oraz zmianę energii wewnętrznej. Masa cząsteczkowa siarczku wodoru $\mu = 34,08 \text{ kg/kmol}$. Wykładnik adiabaty $\kappa = 1,33$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.



Rozwiązanie

$$V_k = V_n \cdot \frac{1}{\kappa} = 1,78 \text{ m}^3,$$

$$T_k = T_n \cdot \frac{\kappa-1}{\kappa} = 357 \text{ K},$$

$$\Delta U = -L = \frac{mRT \left(n \frac{\kappa-1}{\kappa} - 1 \right)}{\mu(\kappa-1)} = 254 \text{ kJ}.$$

Zadanie 89

Podczas rozprężania wodoru wykonał pracę $L = 4270 \text{ J}$. Obliczyć ilość ciepła, jaka została dostarczona jeżeli gaz rozszerzał się: a) izobarycznie, b) izotermicznie. Ciepło molowe w warunkach stałej objętości dla wodoru $C_V = 20,27 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$, uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$\text{a) } Q = L \left(\frac{C_V}{R} + 1 \right) = 13688,8 \text{ J}.$$

$$\text{b) } Q = L = 4270 \text{ J}.$$

Zadanie 90

Powietrze znajdujące się pod ciśnieniem $p_1 = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ sprężono adiabatycznie do ciśnienia $p_2 = 10,13 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Jakie będzie ciśnienie p_3 , jeżeli sprężone powietrze w warunkach stałej objętości oziębić do temperatury początkowej. Wkładnik adiabaty dla powietrza $\kappa = 1,4$.

Rozwiązanie

$$p_x = p_1 \cdot \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot p_2 \cdot \frac{1}{\kappa} = 3,68 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Zadanie 91

Najmniejsza objętość gazu wykonującego cykl Carnota $V_1 = 153 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.



Obliczyć największą objętość V_3 , jeżeli wiadomo, że objętość gazu w końcu izotermicznego rozszerzania $V_2 = 109 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, a w końcu izotermicznego sprężania $V_4 = 160 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Rozwiązanie

$$V_3 = \frac{V_2 \cdot V_4}{V_1} = 197,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Zadanie 92

Gaz o liczbie stopni swobody $z = 5$ wykonuje cykl złożony z dwu izobar i dwu izochor, przy czym największe ciśnienie gazu $p_1 = 10,13 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ jest $k = 2$ razy większe od najniższego ciśnienia p_2 . Zaś największa objętość V_2 jest $l' = 4$ razy większa od najmniejszej $V_1 = 16 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$.

Obliczyć pracę wykonaną przez gaz oraz ilość ciepła w każdym z izoprocesów tego cyklu.

Rozwiązanie

$$L_1 = p_1 V_1 (l' - 1) = 48,6 \cdot 10^4 \text{ J},$$

$$Q_1 = \frac{z}{2} p_1 V_1 (l' - 1) = 121,5 \cdot 10^4 \text{ J},$$

$$L_2 = 0; \quad Q_2 = - \frac{z}{2} \frac{l'}{k} p_1 V_1 (k - 1) = -8,1 \cdot 10^5 \text{ J},$$

$$L_3 = - \frac{p_1 V_1}{k} (l' - 1) = -24,3 \cdot 10^4 \text{ J},$$

$$Q_3 = \frac{p_1 V_1}{k} (l' - 1) \left(1 + \frac{z}{2}\right) = 85,1 \cdot 10^4 \text{ J},$$

$$L_4 = 0; \quad Q_4 = \frac{z}{2} p_1 V_1 (k - 1) = 2,0 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Zadanie 93

Cykl roboczy doskonałego silnika parowego składa się z następujących przemian:



- 1) izochorycznego sprężania pary od ciśnienia p_0 do p_1 ,
- 2) izobarycznego rozprężania się pary od objętości V_0 do V_1 ,
- 3) adiabatycznego rozprężania się pary od objętości V_1 do V_2 ,
- 4) izochorycznego rozprężania pary do ciśnienia początkowego p_0 ,
- 5) izobarycznego sprężania pary do początkowej objętości V_0 .

Obliczyć pracę L wykonywaną przez ten silnik podczas każdego cyklu, jeżeli $V_0 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $V_1 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $V_2 = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $p_0 = 1,0 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $p_1 = 12 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, a wykładnik adiabaty $\kappa = 1,33$.

Rozwiązanie

$$L = p_1 (V_1 - V_0) + \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} \right] - p_0 (V_2 - V_0) =$$

$$= 1920 \text{ J.}$$

Zadanie 94

Azot o masie $m = 2 \text{ kg}$ przy temperaturze $T = 280 \text{ K}$ zajmuje objętość $V = 0,83 \text{ m}^3$. W wyniku adiabatycznego sprężania temperatura gazu wzrosła do $T_1 = 500 \text{ K}$, a ciśnienie do $p_1 = 15,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Obliczyć stosunek ciepła właściwego azotu przy stałym ciśnieniu c_p do ciepła właściwego tego gazu w stałej objętości c_v . Masa cząsteczkowa $\mu = 28 \text{ kg/kmol}$.

Rozwiązanie

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{\lg \frac{mRT}{\mu V p_1}}{\lg \frac{mRT}{\mu V p_1} - \lg \frac{T}{T_1}} = 1,4$$



Zadanie 95

Przy adiabatycznym rozprężaniu powietrza objętość jego zmieniła się od wartości $V_1 = 0,02 \text{ m}^3$ do $V_2 = 0,1 \text{ m}^3$. Obliczyć pracę rozprężania L , jeżeli ciśnienie końcowe powietrza $p_2 = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, a ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu $c_p = 1006 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$. Masa cząsteczkowa powietrza $\mu = 29 \text{ kg/kmol}$, uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$L = \frac{p_2 V_2 (\mu c_p - R)}{R} \left[\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{R}{\mu c_p - R}} - 1 \right] = 46,7 \text{ kJ}.$$

Zadanie 96

W wyniku rozprężania politropowego objętość powietrza zwiększyła się $k = 8$ razy, a ciśnienie i temperatura osiągnęły wartość $p_2 = 2,3 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ oraz $T_2 = 333 \text{ K}$. Znaleźć temperaturę początkową T_1 oraz objętość właściwą powietrza v_1 , jeżeli wykładnik politropy $n = 1,32$. Masa cząsteczkowa powietrza $\mu = 29 \text{ kg/kmol}$.

Rozwiązanie

$$T_1 = T_2 k^{n-1} = 621 \text{ K},$$

$$v_1 = \frac{R}{\mu} \frac{T_2}{p_2} = 0,0595 \text{ m}^3/\text{kg}.$$

Zadanie 97

Przy rozprężaniu politropowym tlenu objętość jego wzrosła od wartości V_1 do V_2 .

Obliczyć zmianę energii wewnętrznej ΔU oraz ilość ciepła pobranego Q , jeżeli ciśnienie początkowe tlenu wynosiło p_1 . Ciepło właściwe tlenu w warunkach stałej objętości



ci jest równe $c_v = \text{const}$. Masa jednego kilomola tlenu jest równa μ . Wykładnik politropy - n , uniwersalna stała gazowa - R .

Rozwiązanie

$$Q = p_1 V_1 \left(\frac{\mu c_v}{R} - \frac{1}{n-1} \right) \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} - 1 \right],$$

$$\Delta U = \frac{c_v p_1 V_1 \mu}{R} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} - 1 \right].$$

Zadanie 98

Hel sprężono politropowo tak, że objętość jego zmniejszyła się od wartości V_1 do V_2 , ciśnienie zaś wzrosło k razy.

Obliczyć pojemność cieplną C_n , jeżeli ciśnienie końcowe i temperatura helu były równe odpowiednio p_2 oraz T_2 . Liczba stopni swobody cząsteczki helu jest równa z .

Rozwiązanie

$$C_n = \frac{z p_2 \cdot V_2}{2 T_2} \left(1 + \frac{\frac{z}{2}}{1 - \frac{\lg k}{\lg \frac{V_1}{V_2}}} \right).$$

Zadanie 99

Przy politropowym sprężaniu masy $m = 1$ kg powietrza siły zewnętrzne wykonały pracę $L = -712$ kJ.

Obliczyć zmianę temperatury i energii wewnętrznej powietrza w tym procesie, jeżeli wykładniki adiabaty i politropy są równe odpowiednio: $\kappa = 1,40$, $n = 1,25$. Ciepło właściwe powietrza przy stałym ciśnieniu $c_p = \text{const} = 1005$ J/kg K.



Rozwiązanie

$$T_2 - T_1 = -\frac{L(n-1)\alpha}{mc_p(\alpha-1)} = 0,62 \text{ K},$$

$$\Delta U = -\frac{L(n-1)}{(\alpha-1)} = 445 \text{ kJ}.$$

Zadanie 100

Określić parametry stanu gazu doskonałego na początku i końcu rozprężania adiabatycznego w cyklu Carnota, jeżeli temperatury grzejnicy i chłodnicy są równe odpowiednio: $T_1 = 900 \text{ K}$, $T_2 = 280 \text{ K}$.

Ciśnienie w stanie początkowym $p_2 = 0,8 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, wykładnik adiabaty $\alpha = 1,4$.

Jaką pracę wykona kmol gazu podczas rozprężania? Uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}$.

Rozwiązanie

$$V_2 = \frac{RT_1}{p_2} = 93,56 \text{ m}^3/\text{kmol}.$$

$$V_3 = \frac{RT_1^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{p_2 T_2^{\frac{1}{\alpha-1}}} = 1730 \text{ m}^3/\text{kmol},$$

$$p_3 = p_2 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = 1343 \text{ N/m}^2,$$

$$L = \frac{R}{\alpha-1} (T_1 - T_2) = 12,9 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kmol}}.$$



Zadanie 101

Kilomol dwuatomowego gazu doskonałego o liczbie stopni swobody $z = 5$ znajdujący się pod ciśnieniem $p_1 = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ i temperaturze $T_1 = 300 \text{ K}$ ogrzano w warunkach stałej objętości do temperatury T_2 . Ciśnienie gazu wzrosło do $p_2 = 2,026 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Następnie gaz rozprężył się izotermicznie do ciśnienia p_1 , po czym został sprężony izobarycznie do początkowej objętości V_1 .

Obliczyć parametry stanu gazu dla punktów charakterystycznych cyklu oraz sprawność cyklu η . Uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 12,26 \text{ m}^3,$$

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 600 \text{ K},$$

$$V_2 = \frac{nRT_1 p_2}{p_1^2} = 24,52 \text{ m}^3,$$

$$n = 1 \text{ kilomol}$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{z}{2} \frac{(p_2 - p_1)}{p_2 \ln \frac{p_2}{p_1}}} = 0,36.$$

Zadanie 102

Jakie jest średnie ciśnienie p gazu w czasie suwu pracy w cylindrze silnika samochodu, jeżeli samochód ten przy $n = 60 \text{ obr/s}$ wytwarza moc $P = 17 \text{ kW}$ na wale. Średnica cylindra $d = 67,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ suw tłoka wynosi $l = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$, liczba cylindrów $k = 4$, a współczynnik sprawności silnika jest równy $\eta = 0,27$.



Rozwiązanie

$$p = \frac{8 Pl^{-1-n}}{\pi d^2 \ln \eta} = 2 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}.$$

Zadanie 103

Jaką pracę L' wykonają siły zewnętrzne w idealnej chłodziarce wykorzystującej odwrótny cykl Carnota, aby z zamrażalnika o temperaturze $T = 263 \text{ K}$ pobrać ilość ciepła $Q = 10^5 \text{ J}$. Temperatura wody chłodzącej jest równa $T_1 = 283 \text{ K}$.

Rozwiązanie

$$L' = Q \frac{(T_1 - T)}{T} = 7,6 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Zadanie 104

Masa $m = 1 \text{ kg}$ powietrza wykonuje cykl składający się z dwóch izochor i dwóch izobar. Początkowa objętość gazu $V_1 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$, ciśnienie zmienia się od $p_1 = 1,2 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}$ do $p_2 = 1,4 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}$, a temperatura $T_3 = 423 \text{ K}$.

Znaleźć:

- 1) współrzędne przecięcia izochor i izobar,
- 2) pracę wykonywaną w ciągu jednego cyklu,
- 3) ilość ciepła pobraną ze źródła ciepła w ciągu jednego cyklu,
- 4) sprawność cyklu,
- 5) sprawność cyklu Carnota, którego izotermy charakteryzowałyby się skrajnymi temperaturami rozpatrywanego cyklu. Masa cząsteczkowa powietrza $\mu = 29 \text{ kg/kmol}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$. Liczba stopni swobody dla cząsteczek powietrza $z = 5$.



Rozwiązanie

$$1) T_1 = \frac{p_1 V_1^\mu}{mR} = 335 \text{ K},$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_1^\mu}{mR} = 391 \text{ K},$$

$$V_2 = \frac{mRT_3}{\mu p_2} = 8,64 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3;$$

$$T_4 = \frac{p_1 T_3}{p_2} = 362 \text{ K}.$$

$$2) L = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = (p_2 - p_1)\left(\frac{mRT_3}{\mu p_2} - V_1\right) = 1280 \text{ J}.$$

$$3) Q = \frac{z}{2} V_1 (p_2 - p_1) + \frac{z+2}{2} \left(\frac{m}{\mu} RT_3 - p_2 V_1\right) = 72,1 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

$$4) \eta = \frac{L}{Q} \cdot 100\% = 1,8\%$$

$$5) \eta_c = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 1 - \frac{p_1 V_1^\mu}{mRT_3} = 0,21;$$

$$\eta_c = 21 \%.$$

Zadanie 105

Gaz doskonały o liczbie stopni swobody $z = 6$ podgrzano w warunkach stałej objętości tak, że jego ciśnienie zwiększyło się $k = 2$ razy. Następnie gaz rozprężył się adiabatycznie do ciśnienia początkowego i wreszcie został sprężony izobarycznie do objętości początkowej.

Znaleźć sprawność η tego cyklu.

Rozwiązanie

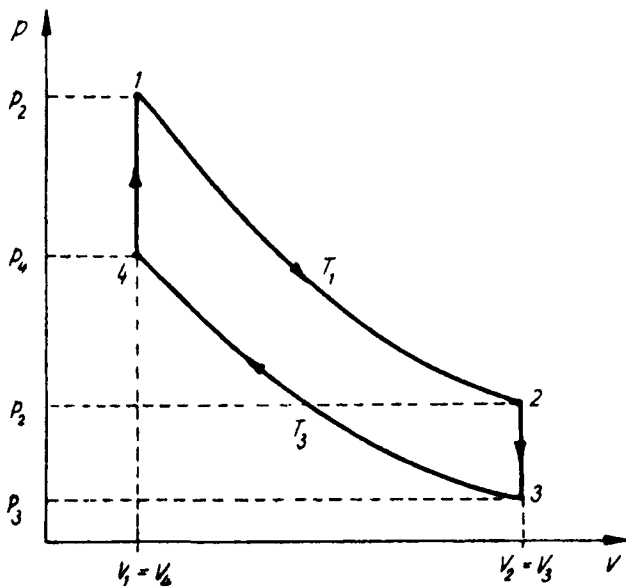
$$\eta = 1 - \frac{\frac{z+2}{z} \left[(k)^{\frac{z}{z+2}} - 1 \right]}{k - 1} = 9,3 \%.$$

Zadanie 106

Na rys. 17 przedstawiono cykl roboczy maszyny. Wiedząc, że krzywe 1-2 i 3-4 są izotermami, 2-3 i 4-1 izochorami,



dla których $p = 1,5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $T_1 = 480 \text{ K}$, $p_3 = 1,5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $T_3 = 290 \text{ K}$, określić parametry stanu gazu roboczego w punktach 1, 2, 3 i 4. Obliczenia przeprowadzić dla $n = 1$ kilomola gazu. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.



Rys. 17

Rozwiązanie

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 2,66 \text{ m}^3,$$

$$T_2 = T_1 = 480 \text{ K},$$

$$p_2 = p_3 \frac{T_1}{T_3} = 2,5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$V_2 = \frac{nRT_3}{p_3} = 16 \text{ m}^3,$$

$$V_3 = V_2,$$



$$p_4 = \frac{p_1 T_3}{T_1} = 9,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$V_4 = V_1.$$

$$T_4 = T_3.$$

Zadanie 107

Cykl turbiny gazowej przy stałym ciśnieniu (z izobarycznym doprowadzaniem i odprowadzaniem ciepła) składa się z adiabaty 1-2 (sprężanie powietrza w kompresorze przed podaniem go do komory spalania), izobary 2-3 (spalanie paliwa w komorze spalania), adiabaty 3-4 (rozprężanie produktów spalania w dyszach turbiny przy tym wykonywana jest praca obrotu wirnika) i izobary 4-1 (ochładzanie spalonych gazów przy ciśnieniu atmosferycznym do temperatury otoczenia). Wiedząc, że $\frac{p_2}{p_1} = k = 6$ (rys. 18), $T_1 = 293 \text{ K}$, $T_3 = 630 \text{ K}$, wykładnik adiabaty $\kappa = 1,4$ zaś ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu dla powietrza oraz produktów spalania jest takie samo i równe $c_p = \text{const} = 1050 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, obliczyć współczynnik sprawności η cyklu i dane konieczne do wykreślenia cyklu w układzie współrzędnych T, S . Obliczenia przeprowadzić dla masy gazu $m = 1 \text{ kg}$.

Rozwiązanie

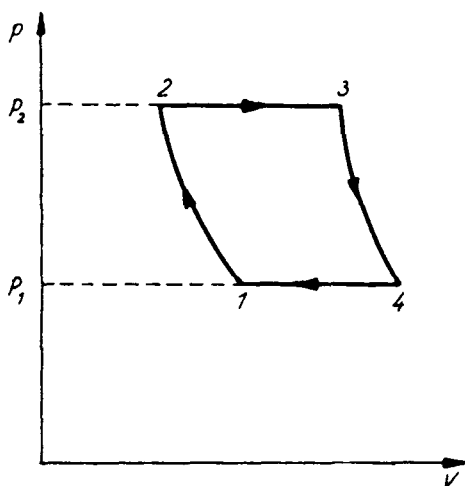
$$\eta = 1 - \frac{1}{k^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = 0,4;$$

$$T_2 = T_1 k^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 489 \text{ K},$$

$$T_4 = T_3 \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 378 \text{ K},$$

$$\Delta S_{2-3} = -\Delta S_{4-1} = mc_p \ln \frac{T_3}{T_1} = 266 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$





Rys. 18

Zadanie 108

Określić parametry stanu oraz zmianę entropii jednego kilomola gazu doskonałego na początku i końcu rozprężania izotermicznego cyklu Carnota, jeżeli wiadomo, że ciśnienie w stanie początkowym $p_1 = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, temperatura grzejnicy $T_1 = 900 \text{ K}$, a gaz pobrał od niej ilość ciepła $Q = 1,75 \cdot 10^6 \text{ J}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 74,9 \text{ m}^3,$$

$$n = 1 \text{ kmol},$$

$$V_2 = \frac{nRT_1}{p_1} \exp\left(\frac{Q}{nRT_1}\right) = 94,6 \text{ m}^3,$$

$$p_2 = \frac{p_1}{\exp\left(\frac{Q}{nRT_1}\right)} = 79,2 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$



$$\Delta S = \frac{Q}{T_1} = 1,945 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Zadanie 109

Ciepło właściwe ciała stałego o temperaturze $T > 273 \text{ K}$ można obliczyć z następującej zależności empirycznej: $c = a + bT$. Wiedząc, że stałe a i b dla aluminium są równe, odpowiednio: $766 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $0,459 \text{ J/kg} \cdot \text{K}^2$ obliczyć zmianę entropii ΔS przy ogrzewaniu aluminiowej belki o masie $m = 8 \text{ kg}$ od temperatury $T_1 = 300 \text{ K}$ do $T_2 = 900 \text{ K}$.

Rozwiązanie

$$\Delta S = m \left[a \ln \frac{T_2}{T_1} + b (T_2 - T_1) \right] = 8944 \text{ J/K}.$$

Zadanie 110

Obliczyć zmianę entropii podczas następujących procesów:

- 1) izobarycznego ogrzewania $m = 0,1 \text{ kg}$ azotu od temperatury $T_1 = 273 \text{ K}$ do $T_2 = 398 \text{ K}$,
- 2) izochorycznego oziębiania $n = 2 \text{ kmol}$ tlenu od $T_1 = 550 \text{ K}$ do $T_2 = 275 \text{ K}$,
- 3) izotermicznego rozprężania $n = 0,5 \text{ kmol}$ tlenku węgla od objętości $V_1 = 11 \text{ m}^3$ do $V_2 = 33 \text{ m}^3$.

Ciepło właściwe w warunkach stałego ciśnienia dla azotu $c_p = 29,05 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, ciepło właściwe w stałej objętości dla tlenu $c_v = 20,9 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$. Masa cząsteczkowa tlenu $\mu = 32 \text{ kg/kmol}$. Uniwersalna gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$1) \Delta S_1 = mc_p \ln \frac{T_2}{T_1} = 39,4 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

$$2) \Delta S_2 = n\mu c_v \ln \frac{T_2}{T_1} = -40662 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

$$3) \Delta S_3 = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = 4,2 \cdot 10^2 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$



Zadanie 111

Obliczyć zmianę entropii ΔS przy przejściu masy $m = 1 \text{ kg}$ lodu o temperaturze $T_1 = 248 \text{ K}$ w parę wodną o temperaturze $T_2 = 373 \text{ K}$ pod normalnym ciśnieniem atmosferycznym. Ciepło właściwe lodu $c_1 = 2,10 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, ciepło właściwe wody $c_2 = 4,19 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, ciepło właściwe topnienia lodu $L_t = 333,6 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$, ciepło właściwe parowania wody $L_p = 2258,3 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$. Temperatura topnienia lodu $T_0 = 273 \text{ K}$.

Rozwiązanie

$$\Delta S = mc_1 \ln \frac{T_0}{T_1} + \frac{mL_t}{T_0} + mc_2 \frac{T_2}{T_0} + \frac{mL_p}{T_2} = 8796,8 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Zadanie 112

Do masy $m_1 = 3 \text{ kg}$ wody o temperaturze $T_1 = 293 \text{ K}$ wrzucono masę $m_2 = 1 \text{ kg}$ mosiądzu ogrzanego do temperatury $T_2 = 586 \text{ K}$.

Obliczyć zmianę entropii tego układu po ustaleniu się temperatury. Założyć, że straty ciepłne nie występują i że pojemność cieplną naczynia, w którym znajduje się woda można pominąć. Ciepła właściwe wody i mosiądzu są równe odpowiednio:

$$c_1 = 4,19 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}, \quad c_2 = 0,39 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}.$$

Rozwiązanie

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln \frac{T_x}{T_1} + m_2 c_2 \ln \frac{T_x}{T_2} = 113,27 \text{ J/K},$$

gdzie

$$T_x = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = 301,8 \text{ K}.$$



Zadanie 113

Jak zmieni się entropia masy $m = 1,4$ kg tlenku węgla, który się rozprężył ze stanu początkowego o ciśnieniu $p_1 = 0,3 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ i temperaturze $T_1 = 293$ K do stanu końcowego o ciśnieniu $p_2 = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ i temperaturze $T_2 = 263$ K. Masa jednego kilomola tlenku węgla $\mu = 28$ kg/kmol, jego ciepło molowe przy stałym ciśnieniu $C_p = 29,05 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{p_1}{p_2} = -156,48 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Zadanie 114

Gaz doskonały o objętości $V_1 = 10^{-2} \text{ m}^3$ i ciśnieniu $p_1 = 2,26 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ rozpręga się w stałej temperaturze do objętości $V_2 = 2,72 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$. Obliczyć zmianę energii swobodnej gazu w tym procesie.

Rozwiązanie

$$F_2 - F_1 = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = -2261,35 \text{ J}.$$

Zadanie 115

Masę $m = 5,6 \cdot 10^{-2}$ kg azotu o temperaturze $T = 400$ K sprężono izotermicznie tak, że ciśnienie gazu wzrosło $k = 2$ razy.

Obliczyć zmianę energii swobodnej ΔF i potencjału termodynamicznego ΔG w tym procesie. Masa cząsteczkowa azotu $\mu = 28$ kg/kmol, uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$\Delta F = \frac{m}{\mu} RT \ln k = 4607,1 \text{ J},$$

$$\Delta G = \frac{m}{\mu} RT \ln k = 4607,1 \text{ J}.$$



Zadanie 116

W temperaturze $T_0 = 273,15 \text{ K}$ ciśnienie pary wodnej nad lodem $p = 610,6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Ciepło właściwe topnienia lodu w temperaturze T_0 wynosi $L_t = 333,6 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$, a ciepło właściwe parowania w tej temperaturze $L_p = 2397,2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

Obliczyć ciśnienie p_x pary wodnej nad lodem w temperaturze $T = 272,15 \text{ K}$. Masa cząsteczkowa pary wodnej $\mu = 18 \text{ kg/kmol}$, uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Uwaga: Przy obliczeniach należy potraktować parę jako gaz doskonały, a objętość właściwą lodu pominąć w porównaniu z objętością właściwą pary.

Rozwiązanie

$$p_x = p \left[1 + \frac{(L_t + L_p)(T - T_0)\mu}{T_0^2 R} \right] = 560 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Zadanie 117

Przy jakim ciśnieniu p będzie wrzała woda o temperaturze $T = 368 \text{ K}$, jeżeli objętości właściwe wody i pary są równe odpowiednio: $v_1 = 1,04 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$, $v_2 = 1,67 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$. Ciepło właściwe parowania wody $L_p = 2258,28 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$, temperatura wrzenia wody pod normalnym ciśnieniem $(p_0 = 101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}) T_1 = 373 \text{ K}$.

Rozwiązanie

$$p = p_0 - \frac{L_p}{v_2 - v_1} \ln \frac{T_1}{T} = 8,46 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Zadanie 118

Zależność temperatury topnienia od ciśnienia zewnętrznego dla naftolu alfa można wyrazić wzorem $T = a + bp + cp^2$,

gdzie: $a = 369 \text{ K}$, $b = 248 \cdot 10^{-9} \frac{\text{K}}{\text{N}}$, $c = 65 \cdot 10^{-18} \frac{\text{K}}{\text{N}^2}$.



Obliczyć ciepło właściwe topnienia L_t tej substancji pod ciśnieniem $p_0 = 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ jeżeli przy topnieniu objętość właściwa zwiększa się o $\Delta v = 1,07 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$.

Rozwiązanie

$$L_t = \frac{(a + bp_0 + cp_0^2)\Delta v}{b + 2cp_0} = 1,63 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}.$$

2.4. Gazy rzeczywiste, pary i ciecze

2.4.1. Wstęp

Własności gazów rzeczywistych stosunkowo dobrze opisuje równanie van der Waalsa, które w odniesieniu do jednego kilomola gazu ma postać:

$$\left(p + \frac{a}{v_0^2}\right)(v_0 - b) = RT,$$

gdzie a , b - stałe, mające różne wartości dla różnych gazów,

v_0 - objętość jednego kilomola gazu,

p - ciśnienie,

T - temperatura,

R - uniwersalna stała gazowa.

Wyrażenie a/v_0^2 nazywa się ciśnieniem wewnętrznym (kohezyjnym), $b = \frac{2}{3}\pi d^3 N_A$, gdzie: d - efektywna średnica cząsteczki, N_A - liczba Avogadro.

Równanie van der Waalsa dla dowolnej masy m gazu o masie cząsteczkowej μ ma postać:



$$\left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2}\right) \left(V - \frac{m}{\mu} b\right) = \frac{m}{\mu} RT,$$

gdzie p , V i T - ciśnienie, objętość i temperatura całego gazu.

Zależność między stałymi van der Waalsa a i b oraz parametrami stanu krytycznego p_k , V_{ok} , T_k wyrażają równania

$$V_{ok} = 3b, \quad T_k = \frac{8a}{27bR}, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}.$$

Powyższe równania rozwiązane względem stałych a i b dają:

$$a = \frac{27 T_k^2 R^2}{64 p_k}, \quad b = \frac{T_k R}{8 p_k}.$$

Za pomocą zredukowanych parametrów stanu równanie van der Waalsa, dla jednego kilomola gazu, można przedstawić w postaci

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\tau,$$

gdzie $\pi = \frac{p}{p_k}$, $\omega = \frac{V_0}{V_{ok}}$, $\tau = \frac{T}{T_k}$.

Równanie van der Waalsa w postaci wirialnej ma postać

$$pV = n(RT + Bp),$$

gdzie n - liczba kilomoli gazu,

$B = b - \frac{a}{RT}$ nazywa się klasycznym, drugim wirialem.

Współczynnik napięcia powierzchniowego cieczy

$$\delta = \frac{F}{l},$$

gdzie l - długość elementu obwodu ograniczającego warstwę powierzchniową cieczy,

F - siła działająca na ten element obwodu.

Przy izotermicznym zwiększaniu pola powierzchni warstwy powierzchniowej cieczy o ΔS wykonywana jest praca

$$L = \delta \Delta S.$$



Dodatkowe ciśnienie, związane z krzywizną powierzchni cieczy, określone jest wzorem Laplace'a:

$$\Delta p = \delta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

gdzie R_1 i R_2 - promienie krzywizny dwu wzajemnie prostopadłych przekrojów powierzchni cieczy.

Promień R jest dodatni, jeżeli środek krzywizny znajduje się wewnątrz cieczy (menisk wypukły), natomiast jest on ujemny, jeżeli środek krzywizny znajduje się na zewnątrz cieczy (menisk wklęsły).

Wysokość wznoszenia się cieczy w rurce włoskowatej (kapilarze)

$$h = \frac{2 \delta \cos \vartheta}{\rho r},$$

gdzie ϑ - kąt zwilżania (graniczny, zetknięcia),

ρ - gęstość cieczy,

r - promień przekroju rurki,

g - przyspieszenie ziemskie.

W przypadku całkowitego zwilżania $\vartheta = 0$, w przypadku zaślaku braku zwilżania $\vartheta = \pi$.

Ciśnienie osmotyczne p elektrycznie nie przewodzącego roztworu jest związane z jego temperaturą bezwzględną T według wzoru van't Hoffa:

$$p = \frac{m}{\mu V} RT = CRT,$$

gdzie m - masa rozpuszczonej substancji,

μ - masa cząsteczkowa rozpuszczonej substancji,

V - objętość roztworu,

R - uniwersalna stała gazowa,

C - liczba kilomoli substancji rozpuszczonej w jednostce objętości roztworu (stężenie molowe roztworu).



Ciśnienie pary nasyconej nad roztworem jest mniejsze niż nad czystym rozpuszczalnikiem. Prawo Raoult'a określa względne zmniejszenie ciśnienia pary nasyconej nad roztworem o dostatecznie małym stężeniu

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{n_0 + n},$$

gdzie p_0 - ciśnienie pary nasyconej nad czystym rozpuszczalnikiem,

p - ciśnienie pary nasyconej nad roztworem,

n - liczba kilomoli rozpuszczonej substancji,

n_0 - liczba kilomoli rozpuszczalnika.

2.4.2. Przykłady

Zadanie 119

Podczas ogrzewania masy $m = 3,2$ kg tlenu od temperatury $T_1 = 293$ K do $T_2 = 393$ K objętość jego wzrosła od $V_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ do $V_2 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Obliczyć: 1) zmianę energii wewnętrznej,

2) zmianę entropii tlenu zakładając, że spełnia on równanie van der Waalsa. Masa jednego kilomola tlenu $\mu = 32$ kg/kmol, ciepło molowe w stałej objętości $C_v = \text{const} = 20,9 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$, stałe van der Waalsa są równe odpowiednio: $a = 1,36 \cdot 10^5 \frac{\text{J m}^3}{(\text{kmol})^2}$, $b = 32,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$, uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

1) Przy zmianie objętości gazu rzeczywistego zostaje wykonana praca przeciwko siłom wewnętrznym wynikającym z wzajemnego oddziaływania cząsteczek. Wewnętrzne ciśnienie p_i , będące wynikiem wzajemnego oddziaływania cząsteczek, jest równe:

$$p_1 = \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2},$$

zatem całkowita praca, wykonana przeciwko ciśnieniu wewnętrznemu

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = \frac{m^2}{\mu^2} a \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2} = \frac{m^2}{\mu^2} a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \quad (1)$$

idzie na podwyższenie energii wewnętrznej gazu. O wartość obliczoną w (1) zwiększy się w omawianej w zadaniu przemianie stanu energia wewnętrzna gazu rzeczywistego w stosunku do gazu doskonałego.

Całkowita zmiana energii wewnętrznej wyniesie więc

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_v (T_2 - T_1) + \frac{m^2}{\mu^2} a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \quad (2)$$

2) Elementarna zmiana entropii

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + p dV}{T}, \quad (3)$$

gdzie, zgodnie z wynikiem uzyskanym w pierwszej części zadania,

$$dU = \frac{m}{\mu} C_v dT + \frac{m^2}{\mu^2} a \frac{dV}{V^2}. \quad (4)$$

Z równania van der Waalsa wynika, że:

$$p = \frac{\frac{m}{\mu} RT}{V - \frac{m}{\mu} b} - \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2},$$

zatem praca, którą wykona gaz przeciwko siłom zewnętrznym

$$p dV = \left(\frac{\frac{m}{\mu} RT}{V - \frac{m}{\mu} b} - \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) dV. \quad (5)$$

Podstawiając (4) i (5) do (3) otrzymuje się

$$dS = \frac{m}{\mu} C_v \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V - \frac{m}{\mu} b}. \quad (6)$$



Całkowanie (6) prowadzi do następującego wyniku:

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V - \frac{m}{\mu} b} = \\ &= \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{(V_2 - \frac{m}{\mu} b)}{(V_1 - \frac{m}{\mu} b)}.\end{aligned}\quad (7)$$

Podstawiając do (2) i (7) dane numeryczne otrzymuje się

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{3,2 \text{ kg}}{32 \text{ kg/kmol}} 20,9 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 100 \text{ K} + \\ &+ \frac{(3,2)^2 \text{ kg}^2}{(32)^2 (\text{kg/kmol})^2} 1,36 \cdot 10^5 \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{(\text{kmol})^2} \left(\frac{10^3}{4 \text{ m}^3} - \frac{10^3}{8 \text{ m}^3} \right) = \\ &= 37,9 \cdot 10^4 \text{ J},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{3,2 \text{ kg}}{32 \text{ kg/kmol}} 20,9 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \ln \left(\frac{393 \text{ K}}{293 \text{ K}} \right) + \\ &+ \frac{3,2 \text{ kg}}{32 \text{ kg/kmol}} 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \ln \frac{(80 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 - 32,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3)}{(40 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 - 32,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3)} = \\ &= 21,55 \cdot 10^2 \text{ J/K}.\end{aligned}$$

Zadanie 120

Dla pewnego gazu rzeczywistego poprawka w równaniu van der Waalsa $a = 45,3 \cdot 10^4 \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{(\text{kmol})^2}$, a temperatura krytyczna $T_k = 282,7 \text{ K}$.

Obliczyć efektywną średnicę cząsteczki tego gazu. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$, liczba Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{kmol}}$.



Rozwiązanie

Jak wiadomo

$$a = \frac{27}{64} \frac{T_k^2 \cdot R^2}{p_k}$$

skąd

$$p_k = \frac{27}{64} \frac{T_k^2 \cdot R^2}{a} \quad (1)$$

Ponieważ

$$b = \frac{T_k \cdot R}{8 p_k} \quad (2)$$

zatem, uwzględniając (1) w (2) otrzymuje się

$$b = \frac{8 a}{27 R T_k} \quad (3)$$

Średnica czynna cząsteczki

$$d = \sqrt[3]{\frac{3 b}{2 \pi N_A}} \quad (4)$$

Podstawiając do (4) wartość b obliczoną w (3) otrzymuje się ostatecznie

$$\begin{aligned} d &= \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1,33 a}{\pi \cdot R N_A \cdot T_k}} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1,33 \cdot 45,3 \cdot 10^4 \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{(\text{kmol})^2}}{3,14 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 6,02 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{kmol}} \cdot 282,7 \text{ K}}} = \\ &= 3,5 \cdot 10^{-10} \text{ m.} \end{aligned}$$

Zadanie 121

W jakiej temperaturze jeden kilomol argonu będzie zajmował objętość $V_0 = 1 \text{ m}^3$, jeśli jego ciśnienie $p = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Parametry krytyczne dla argonu: $p_k = 4,86 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $T_k = 150,8 \text{ K}$

Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$



Rozwiązanie

Stała b w równaniu van der Waalsa jest równa

$$b = \frac{T_k R}{8 p_k}$$

wobec tego objętość krytyczna

$$V_{ok} = 3b = \frac{3}{8} \frac{T_k R}{p_k}$$

Zredukowane parametry stanu

$$\omega = \frac{V_0}{V_{ok}} = \frac{8}{3} \frac{p_k V_0}{T_k R} \quad (1)$$

$$\pi = \frac{p}{p_k} \quad (2)$$

$$\tau = \frac{T}{T_k} \quad (3)$$

Ponieważ równanie van der Waalsa dla jednego kilomola gazu zapisane za pomocą zredukowanych parametrów stanu ma postać

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) (3\omega - 1) = 8\tau,$$

zatem szukana temperatura

$$\tau = \frac{1}{8} \left(\pi + \frac{3}{\omega^2} \right) (3\omega - 1) T_k \quad (4)$$

Podstawiając do (1), (2) i (4) dane numeryczne otrzymuje się

$$\omega = \frac{8 \cdot 4,86 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}}{3 \cdot 150,8 \text{ K} \cdot 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}} = 21,6;$$

$$\omega^2 = 468,$$

$$\pi = \frac{3 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{4,86 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 0,62$$



$$T = \frac{1}{8} \left(0,62 + \frac{3}{468} \right) (64,8 - 1) 150,8 \text{ K} = 364 \text{ K}.$$

Zadanie 122

Korzystając z równania van der Waalsa w postaci wirialnej, obliczyć różnicę między ciepłem molowym C_p - a ciepłem molowym C_v dla ksenonu, przy ciśnieniu $p = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ i temperaturze $T = 298 \text{ K}$. Ciśnienie krytyczne dla ksenonu $p_k = 5,9 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, temperatura krytyczna $T_k = 290 \text{ K}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

Różnica pojemności cieplnych molowych

$$(C_p - C_v) dT = pdV. \quad (1)$$

Równanie van der Waalsa w postaci wirialnej

$$pV = RT + \left(b - \frac{a}{RT} \right) p. \quad (2)$$

Różniczkując (2) przy $p = \text{const}$ dostaje się

$$pdV = RdT + \frac{ap}{RT^2} dT. \quad (3)$$

Uwzględniając (3) w (1) otrzymuje się

$$C_p - C_v = R + \frac{ap}{RT^2}. \quad (5)$$

Ponieważ stała w równaniu van der Waalsa

$$a = \frac{27}{64} \cdot \frac{T_k^2 R^2}{p_k},$$

zatem

$$C_p - C_v = R \left(1 + \frac{27}{64} \cdot \frac{p}{p_k} \cdot \frac{T_k^2}{T^2} \right). \quad (6)$$

Podstawiając do (6) dane numeryczne, otrzymuje się



$$C_p - C_v = 8,314 \cdot \frac{J}{\text{kmol} \cdot K} \left[1 + \frac{27 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} (290)^2 K^2}{64 \cdot 5,9 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} (298)^2 K^2} \right] =$$

$$= 8,373 \cdot 10^3 J/\text{kmol} \cdot K.$$

Zadanie 123

Pęcherzyk powietrza znajduje się na głębokości $h=0,25$ m pod powierzchnią swobodną nafty, w której wzbudzone drgania ultradźwiękowe.

Znaleźć maksymalne i minimalne ciśnienie wewnątrz pęcherzyka, jeżeli jego promień zmienia się według zależności:

$$R = R_0 + A \sin \omega t,$$

$$\text{gdzie: } R_0 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m},$$

$$A = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Ciśnienie atmosferyczne $p = 1,013 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$, gęstość nafty $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, a jej współczynnik napięcia powierzchniowego $\delta = 27 \cdot 10^{-2} \frac{N}{m}$.

Rozwiązanie

Całkowite ciśnienie wewnątrz pęcherzyka powietrza równa się sumie ciśnienia atmosferycznego (przestrzeń nad cieczą połączona jest z atmosferą), hydrostatycznego słupa cieczy o wysokości h oraz ciśnienia pochodzącego od sił napięcia powierzchniowego.

$$p_c = p + \rho gh + \frac{2\delta}{R}, \quad (1)$$

gdzie $R = R_0 + A \sin \omega t$ - promień pęcherzyka.

Z (1) oraz warunków zadania dla R wynika, że: $p_c = p_{\max}$, gdy $\sin \omega t = -1$, $p_c = p_{\min}$, gdy $\sin \omega t = 1$. Wobec tego

$$p_{\max} = p + \rho gh + \frac{2\delta}{R_0 - A}, \quad (2)$$



$$p_{\min} = p + \rho gh + \frac{2\delta}{R_0 + A}. \quad (3)$$

Podstawiając do (2) i (3) dane numeryczne otrzymuje się

$$p_{\max} = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,25 \text{ m} +$$

$$+ \frac{54 \cdot 10^{-2} \text{ N}}{0,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2} = 1,137 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

$$p_{\min} = 1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,25 \text{ m} +$$

$$+ \frac{54 \cdot 10^{-2} \text{ N}}{1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2} = 1,062 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

Zadanie 124

Na powierzchni $S = 4 \cdot 10^8 \text{ m}^2$ w czasie ulewnego deszczu trwającego $t = 6 \cdot 10^2 \text{ s}$ utworzyła się warstwa wody o grubości $h = 0,02 \text{ m}$. Obliczyć energię cieplną i moc wydzieloną podczas łączenia się kropeł w czasie deszczu, jeżeli krople osiągając powierzchnię ziemi miały średnicę $d = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, a tworzyły się z małych kuleczek o średnicy $d_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Współczynnik napięcia powierzchniowego wody w warunkach zadania wynosi

$$\delta = 72,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Rozwiązanie

Energia, która wydzielili się podczas tworzenia się jednej dużej kropli z n małych krolek wynosi

$$\Delta E = \delta \Delta S = \delta (S_1 - S_2), \quad (1)$$

gdzie $S_1 = \pi n d_0^2$ - powierzchnia n małych krolek wody,

$S_2 = \pi d^2$ - powierzchnia jednej, dużej kropli,

δ - współczynnik napięcia powierzchniowego.



Ponieważ objętość dużej kropli jest równa objętości n małych kropli, zatem:

$$\frac{1}{6} \pi d^3 = \frac{1}{6} n \pi d_0^3,$$

skąd

$$n = \frac{d^3}{d_0^3}.$$

Uwzględniając powyższe zależności we wzorze (1) otrzymuje się

$$\Delta E = \pi \delta d^2 \left(\frac{d}{d_0} - 1 \right). \quad (2)$$

Liczba dużych kropli N , które spadły w czasie deszczu jest równa

$$N = \frac{6 \text{ Sh}}{\pi d^3}, \quad (3)$$

wobec tego, całkowita energia

$$E = N \Delta E. \quad (4)$$

Uwzględniając (2) i (3) w (4) otrzymuje się

$$E = 6 \delta \text{ Sh} \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} \right). \quad (5)$$

Moc energii cieplnej wydzielonej w czasie deszczu

$$P = \frac{E}{t} = \frac{6 \text{ Sh} \delta}{t} \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} \right). \quad (6)$$

Podstawiając do (5) i (6) dane numeryczne dostaje się

$$E = 24 \cdot 10^8 \text{ m}^2 \cdot 72,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \left(\frac{10^6}{3 \text{ m}} - \frac{10^3}{3 \text{ m}} \right) =$$

$$= 1,17 \cdot 10^{12} \text{ J},$$

$$P = \frac{1,17 \cdot 10^{12} \text{ J}}{6 \cdot 10^2 \text{ s}} = 1,95 \cdot 10^9 \text{ W}.$$



Zadanie 125

Na końcach rurki wydmuchnięto dwa mydlane pęcherzyki o promieniach $R_1 = 0,1 \text{ m}$ i $R_2 = 0,05 \text{ m}$.

Znaleźć:

- 1) który pęcherzyk będzie powiększał się, a który zmniejszał,
- 2) o ile zmieni się promień małego pęcherzyka, jeżeli promień dużego zmieni się o $\Delta R_1 = 10^{-3} \text{ m}$,
- 3) zmianę powierzchniowej energii swobodnej obu pęcherzyków mydlanych.

Współczynnik napięcia powierzchniowego wody mydlanej

$$\delta = 45 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Rozwiązanie

Ciśnienie wewnątrz pęcherzyka

$$p = p_0 + p_\delta, \quad (1)$$

gdzie p_0 - ciśnienie atmosferyczne,

p_δ - dodatkowe ciśnienie spowodowane zakrzywioną powierzchnią wody mydlanej.

Jak wiadomo

$$p_\delta = \frac{2\delta}{R} \cdot 2, \quad (2)$$

gdzie δ - współczynnik napięcia powierzchniowego,

R - promień krzywizny powierzchni.

Współczynnik 2 uwarunkowany jest tym, że błonka mydlana posiada dwie powierzchnie: zewnętrzną i wewnętrzną.

Z uwagi na (1) i (2) ciśnienie w pęcherzykach można zapisać następująco:

$$p_1 = p_0 + \frac{4\delta}{R_1}, \quad (3)$$

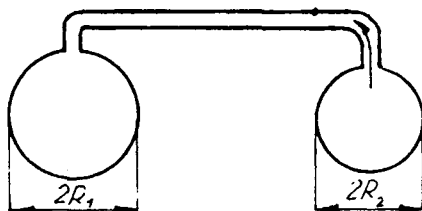
$$p_2 = p_0 + \frac{4\delta}{R_2}, \quad (4)$$



gdzie R_1, p_1 - promień większego pęcherzyka i ciśnienie wewnątrz niego,

R_2, p_2 - promień i ciśnienie małego pęcherzyka.

Porównując dwa ostatnie wyrażenia można stwierdzić, że ciśnienie wewnątrz większego pęcherzyka jest mniejsze w porównaniu z ciśnieniem wewnątrz małego pęcherzyka. W związku z tym powietrze będzie przepływać od małego do dużego pęcherzyka, w konsekwencji mały pęcherzyk będzie się zmniejszał, duży powiększał (rys. 19).



Rys. 19

2) Zmianę promienia małego pęcherzyka w zależności od zmiany promienia dużego pęcherzyka można określić na podstawie prawa Mendelejewa-Clapeyrona. Jeżeli przyjąć, że temperatura powietrza w obu pęcherzykach jest taka sama, to równanie Mendelejewa-Clapeyrona dla większego pęcherzyka przyjmie postać

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT \quad (\text{przed przepływem powietrza}), \quad (5)$$

$$p'_1 V'_1 = \frac{m'_1}{\mu} RT \quad (\text{po przepływie}), \quad (6)$$

zaś dla małego pęcherzyka:

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT \quad (\text{do chwili przepływu}), \quad (7)$$

$$p'_2 V'_2 = \frac{m_2}{\mu} RT \quad (\text{po przepływie}). \quad (8)$$



Odejmując od (6) równanie (5) oraz od (8) wyrażenie (7) otrzymuje się:

$$p_1' V_1' - p_1 V_1 = \frac{\Delta m_1}{\mu} RT, \quad (9)$$

$$p_2' V_2' - p_2 V_2 = \frac{\Delta m_2}{\mu} RT. \quad (10)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$p_1 \approx p_2 \approx p_1' \approx p_2' \approx p_0$$

oraz

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m,$$

równania (9) i (10) można zapisać w postaci

$$p_0 \Delta V_1 = \frac{RT}{\mu} \Delta m,$$

$$p_0 \Delta V_2 = \frac{RT}{\mu} \Delta m,$$

skąd wynika, że

$$\Delta V_1 = \Delta V_2, \quad (11)$$

czyli podczas przepływu powietrza z jednego pęcherzyka do drugiego zmiany objętości pęcherzyków są równe.

Ponieważ objętość kuli $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, to

$$\Delta V = 4 \pi R^2 \Delta R. \quad (12)$$

Z uwagi na (12) wyrażenie (11) przyjmie postać:

$$4 \pi R_1^2 \Delta R_1 = 4 \pi R_2^2 \Delta R_2,$$

skąd

$$\Delta R_2 = \Delta R_1 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \quad (13)$$



3) Z definicji współczynnika napięcia powierzchniowego dostaje się

$$\delta = \frac{\Delta E}{\Delta S}, \quad (14)$$

gdzie: ΔE - zmiana powierzchniowej energii swobodnej błonki,

ΔS - zmiana pola powierzchni błonki.

Powierzchnia błonki pęcherzyka mydlanego

$$S = 2 \cdot 4\pi R^2,$$

skąd

$$\Delta S = 16\pi R \Delta R. \quad (15)$$

Łącząc (14) i (15) otrzymuje się.

$$\Delta E_1 = 16\pi \delta R_1 \Delta R_1$$

dla dużego pęcherzyka oraz

$$\Delta E_2 = -16\pi \delta R_2 \Delta R_2$$

dla małego pęcherzyka.

Znak "-" występuje z uwagi na to, że zmiany promieni ΔR_1 i ΔR_2 zachodzą w przeciwnych kierunkach; przy zwiększaniu promienia dużego pęcherzyka, promień małego zmniejsza się.

Całkowita zmiana powierzchniowej energii swobodnej układu dwu pęcherzyków wyniesie:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta E_1 + \Delta E_2 = 16\pi \delta (R_1 \Delta R_1 - R_2 \Delta R_2) = \\ &= 16\pi \delta R_1 \Delta R_1 \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Podstawiając do (13) i (16) dane numeryczne otrzymuje się

$$\Delta R_2 = 10^{-3} \text{ m} \left(\frac{0,1 \text{ m}}{0,05 \text{ m}} \right)^2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

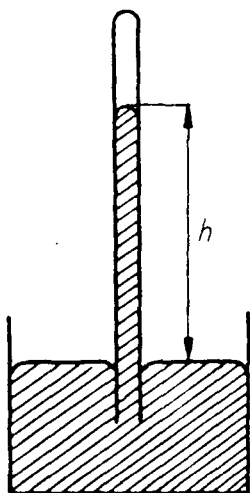


$$\Delta E = 16 \cdot 3,14 \cdot 45 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 10^{-3} \text{ m} \left(1 - \frac{0,1 \text{ m}}{0,05 \text{ m}} \right) =$$

$$= 27,977 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

Zadanie 126

Jeden koniec rurki barometrycznej napełnionej rtęcią zanurzony jest w naczyniu o dużej średnicy (rys. 20). Śred-



Rys. 20

nica wewnętrzna wąskiej rurki $d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Różnica poziomów rtęci $h = 75,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Znaleźć rzeczywistą wartość ciśnienia atmosferycznego. Gęstość rtęci $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, współczynnik napięcia powierzchniowego $\sigma = 54 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Rozwiązanie

Do obliczenia ciśnienia atmosferycznego nie wystarcza znajomość wysokości słupa rtęci h , ponieważ oprócz ciśnienia wywieranego przez ten słup występuje dodatkowe ciśnienie wypukłego menisku rtęci w rurce.

W ten sposób ciśnienie atmosferyczne p_b równoważy ciśnienie słupa rtęci h i dodatkowe ciśnienie p :

$$p_b = h\rho g + p. \quad (1)$$

Ciśnienie dodatkowe p równa się:

$$p = \frac{4 \sigma |\cos \vartheta|}{d}, \quad (2)$$

gdzie d - średnica rurki,

ϑ - kat zwilżania (graniczny).

Łącząc (1) i (2) otrzymuje się

$$p_b = h\rho g + \frac{4 \sigma |\cos \vartheta|}{d} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]. \quad (3)$$



lub $p_b = h + \frac{4 \delta |\cos \vartheta|}{d \rho g}$ w cm słupa rtęci, gdzie

$$h' = \frac{4 \delta |\cos \vartheta|}{d \rho g} \quad \text{w cm słupa rtęci,} \quad (4)$$

stanowi poprawkę, którą należy wprowadzać do odczytów ciśnienia z tego barometru.

Zakładając dla granicy rtęć - szkło kąt $\vartheta = \pi$ otrzymuje się rzeczywistą wartość ciśnienia atmosferycznego.

$$p_b = h \rho g + \frac{4 \delta}{d}. \quad (5)$$

We wzorach od (2) do (4) występowała bezwzględna wartość $|\cos \vartheta|$, ponieważ h' powinno być dodatnie.

Podstawiając do (5) dane numeryczne dostaje się

$$p_b = 75,8 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 13,6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \\ + 2,16 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 200 \frac{1}{\text{m}} = 101561,328 \text{ N/m}^2.$$

Zadanie 127

Obliczyć, w jakim stosunku wzrasta ciśnienie osmotyczne wywołane przez dysocjację cząsteczek substancji rozpuszczonej, jeżeli k -ta część wszystkich cząsteczek substancji rozpuszczonej ulega dysocjacji, przy czym każda z tych cząsteczek rozpada się na i cząsteczek.

Rozwiązanie

Niech n_0 oznacza liczbę cząsteczek rozpuszczonej substancji przypadającą na jednostkę objętości zakładając, że dysocjacja nie zachodzi. Jeżeli k -ta część cząsteczek rozpuszczonej substancji rozpadnie się na i części każda, to wówczas liczba cząsteczek w jednostce objętości będzie

$$n'_0 = n_0 k i + (1 - k) n_0 = [1 + k(i - 1)] n_0.$$



Ponieważ ciśnienie jest proporcjonalne do liczby cząsteczek znajdujących się w jednostce objętości, to w wyniku dysocjacji ciśnienie wzrośnie w stosunku

$$\frac{p'}{p} = \frac{n'_0}{n_0} = 1 + k(i - 1). \quad (1)$$

W przypadku bardzo słabych roztworów zachodzi dysocjacja zupełna. Wówczas $k = 1$ i ostatni wzór przybiera postać

$$\frac{p'}{p} = i.$$

Zadanie 128

Obliczyć stopień dysocjacji cząsteczek chlorku potasu jeżeli masa $m = 3,733 \cdot 10^{-3}$ kg KCl uległa rozpuszczeniu w wodzie o objętości $V = 10^{-3} \text{ m}^3$, przy temperaturze $T = 300 \text{ K}$; występujące w tych warunkach ciśnienie osmotyczne $p' = 2,343 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Masa cząsteczkowa chlorku potasu $\mu = 74,657 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

Niech p będzie ciśnieniem, które by występowało, gdyby dysocjacja nie zachodziła, wówczas na podstawie wzoru (1) wyprowadzonego w rozwiązaniu poprzedniego zadania

$$p' = p[1 + k(i - 1)].$$

Ponieważ $i = 2$, zatem

$$p' = p(1 + k),$$

skąd

$$k = \frac{p'}{p} - 1. \quad (1)$$

Według wzoru van't Hoffa

$$p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}. \quad (2)$$



Uwzględniając (2) w (1) otrzymuje się

$$k = \frac{p_{\text{AV}}}{mRT} - 1. \quad (3)$$

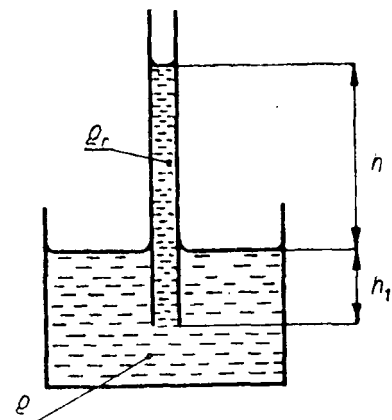
Podstawiając do (3) dane numeryczne dostaje się

$$k = \frac{2,343 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} \cdot 74,657 \text{ kg/kmol} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{3,733 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 300 \text{ K}} - 1 = 0,88.$$

Zadanie 129

Rurka zamknięta na dole półprzepuszczalną błoną, zawierająca roztwór glukozy ($\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$) jest zanurzona do naczynia, w którym znajduje się czysta woda (rys. 21). Po ustaleniu się równowagi poziom roztworu w rurce znajduje się na wysokości $h = 0,1 \text{ m}$ nad poziomem wody. Powierzchnia przekroju rurki $S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, temperatura roztworu $T = 290 \text{ K}$. Błona znajduje się na głębokości $h_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ pod powierzchnią wody.

Obliczyć masę glukozy w roztworze. Gęstość roztworu ρ_r różni się nieznacznie od gęstości wody $\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$, masa cząsteczkowa glukozy $\mu = 180 \text{ kg/kmol}$.



Rys. 21

Rozwiązanie

Półprzepuszczalna błona posiada tę właściwość, że nie przepuszcza rozpuszczonej substancji, natomiast dobrze przez nią przenika czysty rozpuszczalnik. Wskutek tego woda będzie przenikać do roztworu glukozy i poziom roztworu w rurce będzie się podnosił. Po pewnym czasie nastąpi równowaga, przy czym poziom roztworu ustali się na takiej wysokości, że ciśnienie hydrostatyczne słupa cieczy nad poziomem wody zrówna się z ciśnieniem osmotycznym roztworu. Zatem

$$p = h \rho_r g. \quad (1)$$

Ponieważ $\rho_r \approx \rho$ oraz z prawa van't Hoffa $p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$, więc równanie (1) przyjmie postać

$$\frac{m}{\mu V} RT = hg \rho.$$

skąd

$$m = \frac{\mu hg \rho V}{RT}.$$

Ale $V = S(h + h_1)$, czyli

$$m = \frac{\mu hg S \rho (h + h_1)}{RT}. \quad (2)$$

Podstawiając do (2) dane numeryczne otrzymuje się

$$m = \frac{180 \text{ kg/kmol} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 15 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{8,314 \cdot 10^3 \text{ J/kmol} \cdot \text{K} \cdot 290 \text{ K}} \\ = 2,197 \cdot 10^{-6} \text{ kg}.$$

Zadanie 130

W objętości $V = 10^{-3} \text{ m}^3$ wody rozpuszczono $m = 5 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ niedysocjującej substancji, w temperaturze T . Prężność pary nasyconej nad roztworem wynosiła $p = 84,366 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Obliczyć masę cząsteczkową μ rozpuszczonej substancji. Prężność pary nasyconej wody w temperaturze T wynosi $p_0 =$



$= 84,460 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Masa cząsteczkowa wody $\mu_1 = 18 \text{ kg/kmol}$, a gęstość

$$\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Rozwiązanie

Z prawa Raoult'a

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{n_0 + n},$$

wobec tego liczba kilomoli rozpuszczonej substancji

$$n = \frac{m}{\mu} = \frac{p_0 - p}{p} n_0, \quad (1)$$

gdzie n_0 jest liczbą kilomoli rozpuszczalnika.

$$n_0 = \frac{\rho V}{\mu_1}. \quad (2)$$

Uwzględniając (2) w (1) otrzymuje się

$$\mu = \frac{p \mu_1 m}{(p_0 - p) \rho V}. \quad (3)$$

Podstawiając do (3) dane numeryczne dostaje się

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{84,366 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 18 \text{ kg/kmol} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ kg}}{94 \text{ N/m}^2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = \\ &= 475 \text{ kg/kmol}. \end{aligned}$$

2.4.3. Zadania

Zadanie 131

W stalowej butli o pojemności $V = 0,5 \text{ m}^3$ znajduje się masa $m = 2,8 \text{ kg}$ azotu pod ciśnieniem $p = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Jaką temperaturę T_x ma azot, spełniający równanie van der Waalsa,



jeżeli stałe a i b są równe odpowiednio: $1,35 \cdot 10^5 \text{ Jm}^3/(\text{kmol})^2$, $38,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kmol}$. Stała Boltzmanna $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$, liczba Avogadro $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{kmol}}$. Porównać wynik z temperaturą T gazu doskonałego w tych samych warunkach. Masa jednego kilomola azotu $\mu = 28 \text{ kg/kmol}$.

Rozwiązanie

$$T_x = \left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) \frac{\mu}{mk \cdot N_A} = 2988,1 \text{ K}$$

$$T = \frac{\mu p V}{mk N_A} = 3007,7 \text{ K}.$$

Zadanie 132

Wodór o masie $m = 2 \text{ kg}$, spełniając równanie van der Waalsa, zajmuje objętość $V_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Obliczyć pracę L wykonaną przeciwko siłom wewnętrznym gazu, jeżeli jego objętość zwiększy się $n = 4$ razy. Masa cząsteczkowa wodoru $\mu = 2 \text{ kg/kmol}$, stała $a = 0,24 \cdot 10^5 \frac{\text{Jm}^3}{(\text{kmol})^2}$

Rozwiązanie

$$L = \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V_1} \left(\frac{n-1}{n} \right) = 9 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Zadanie 133

Wykorzystując równanie van der Waalsa, obliczyć pracę L jaką wykona $m = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$ azotu o objętości $V_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, przy $n = 4$ -krotnym izotermicznym zwiększeniu swej objętości w temperaturze $T = 300 \text{ K}$. Masa cząsteczkowa azotu $\mu = 28 \text{ kg/kmol}$, stałe równania van der Waalsa: $a = 1,35 \cdot 10^5 \frac{\text{Jm}^3}{(\text{kmol})^2}$, $b = 38,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$, uniwersalna stała gazowa

$$R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}.$$



Rozwiązanie

$$L = \frac{m}{\mu} RT \ln \left(\frac{nV_1 - \frac{m}{\mu} b}{V_1 - \frac{m}{\mu} b} \right) - \frac{m^2}{2} \frac{a}{V_1} \left(\frac{n-1}{n} \right) =$$

$$= 6042,5 \text{ J.}$$

Zadanie 134

Znaleźć efektywną średnicę oraz średnią drogę swobodną cząsteczki azotu w temperaturze $T = 300 \text{ K}$ i pod ciśnieniem $p = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Parametry krytyczne dla tego gazu są następujące

$$p_k = 3,39 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

$$T_k = 126,1 \text{ K.}$$

$$\text{Stała Boltzmanna } k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}.$$

Rozwiązanie

$$d = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot T_k \cdot k}{16 \cdot \pi \cdot p_k}} = 3,06 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\bar{\lambda} = 4 \sqrt[3]{\frac{k p_k^2 \cdot T^3}{12,69 \cdot \pi \cdot T_k^2 \cdot p^3}} = 9,987 \cdot 10^{-8} \text{ m.}$$

Zadanie 135

Kropla rtęci o masie $m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ znajduje się między dwoma płaszczyznami szklanymi ustawionymi równolegle. Obliczyć współczynnik napięcia powierzchniowego δ rtęci, jeżeli wiadomo, że w celu spłaszczenia kropli do grubości $h = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ należało działać siłą $F = 14,7 \text{ N}$. Gęstość rtęci $\rho = 13,6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; nie zwilża ona zupełnie szkła.

Rozwiązanie

$$\delta = \frac{F \rho h}{m \left(\sqrt{\frac{\rho \cdot h}{m}} + \frac{2}{h} \right)} = 49,86 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$



Zadanie 136

W czasie ulewnego deszczu krople wody osiągając powierzchnię ziemi miały średnicę $d = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, a tworzyły się z małych kulczek o średnicy $d_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Obliczyć o ile wzrosła temperatura w dużych kroplach wody w porównaniu z temperaturą małych kropelek, jeżeli ciepło właściwe wody $c = 4,19 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, jej gęstość $\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, współczynnik napięcia powierzchniowego $\delta = 72,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Rozwiązanie

$$\Delta T = \frac{6 \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} \right) \delta}{\rho c} = 35 \cdot 10^{-3} \text{ K}.$$

Zadanie 137

Dobrać średnicę d szklanej rurki włoskowatej dla pomiaru poziomu cieczy w taki sposób, aby błąd względny na skutek włoskowatości nie przewyższał $\epsilon = 0,5 \%$ przy pomiarze wysokości słupa $H = 0,4 \text{ m}$. Cieczą, dla której wykonuje się pomiary jest aceton zwilżający całkowicie szkło. Gęstość i współczynnik napięcia powierzchniowego dla acetonu są równe odpowiednio: $\rho = 792 \text{ kg/m}^3$, $\delta = 23,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Rozwiązanie

$$d = \frac{4\delta}{\epsilon H \rho g} = 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Zadanie 138

Jaką pracę L należy wykonać, aby wydmuchując bańkę mydlaną zwiększyć jej średnicę od $d_1 = 10^{-2} \text{ m}$ do $d_2 = 10^{-1} \text{ m}$. Współczynnik napięcia powierzchniowego wody mydlanej $\delta = 45 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Założyć, że nadmuchiwanie jest przemianą izotermiczną.



Rozwiązanie

$$I. = 2\pi\delta(d_2^2 - d_1^2) = 28 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

Zadanie 139

Różnica poziomów cieczy w kapilarnej U-rurce o średnicach przekrojów $d_1 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ i $d_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ jest $\Delta h = 23 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Gęstość cieczy $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$.

Obliczyć współczynnik napięcia powierzchniowego tej cieczy zakładając całkowite zwilżanie (rys.22).

Rozwiązanie

$$\delta = \frac{\rho g \Delta h d_1 d_2}{4(d_2 - d_1)} = 22,56 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Zadanie 140

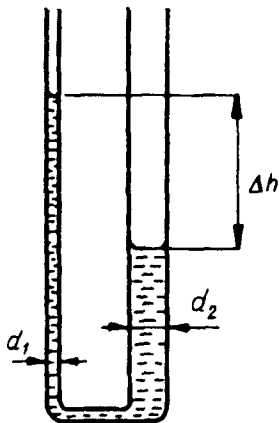
Średnice rurek naczynia w kształcie litery U (rys. 22) $d_1 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ i $d_2 = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Obliczyć różnicę poziomów cieczy w ramionach U-rurki, gdy naczynie wypełni się: 1) wodą, 2) naftą. Gęstość i współczynniki

napięcia powierzchniowego dla wody i nafty są równe odpowiednio: $\rho_w = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\delta_w = 73 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $\rho_n = 8 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$, $\delta_n = 22,56 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Rozwiązanie

$$1) \Delta h_w = \frac{4 \delta_w (d_2 - d_1)}{\rho_w g d_1 d_2} = 0,0267 \text{ m,}$$

$$2) \Delta h_n = \frac{4 \delta_n (d_2 - d_1)}{\rho_n g d_1 d_2} = 0,0119 \text{ m.}$$



Rys. 22

Zadanie 141

W objętości $V = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ rozpuszczono $m = 3,733 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ chlorku potasu w temperaturze $T = 300 \text{ K}$.

Obliczyć ciśnienie osmotyczne p roztworu, jeżeli 80 % cząsteczek KCl uległo dysocjacji. Masa cząsteczkowa chlorku potasu $\mu = 74,657 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$, uniwersalna stała gazowa $R = 8,314 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{\mu V} \left(k + 1 \right) = 4,49 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$
$$k = 0,8.$$

Zadanie 142

Po rozpuszczeniu masy $m = 10^{-2} \text{ kg}$ sacharyny ($\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$) w objętości $V = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ wody ciśnienie osmotyczne roztworu wynosiło $p = 1,52 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Obliczyć temperaturę T roztworu. Cząsteczki sacharyny nie dysocjują, a ich masa cząsteczkowa $\mu = 342,3 \text{ kg/kmol}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$.

Rozwiązanie

$$T = \frac{\mu V p}{m R} = 313 \text{ K}.$$

Zadanie 143

Ciśnienie pary nasyconej nad roztworem w temperaturze T_1 wynosi $p_1 = 4199,64 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Obliczyć ciśnienie p_2 pary nasyconej nad tym roztworem w temperaturze T_2 , jeżeli ciśnienie pary nasyconej nad czystym rozpuszczalnikiem w temperaturze T_1 i T_2 jest równe odpowiednio: $p_{01} = 4239,64 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, oraz $p_{02} = 19864,98 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Rozwiązanie

$$= \frac{p_1 \cdot p_{02}}{p_{01}} = 19678,327 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$





